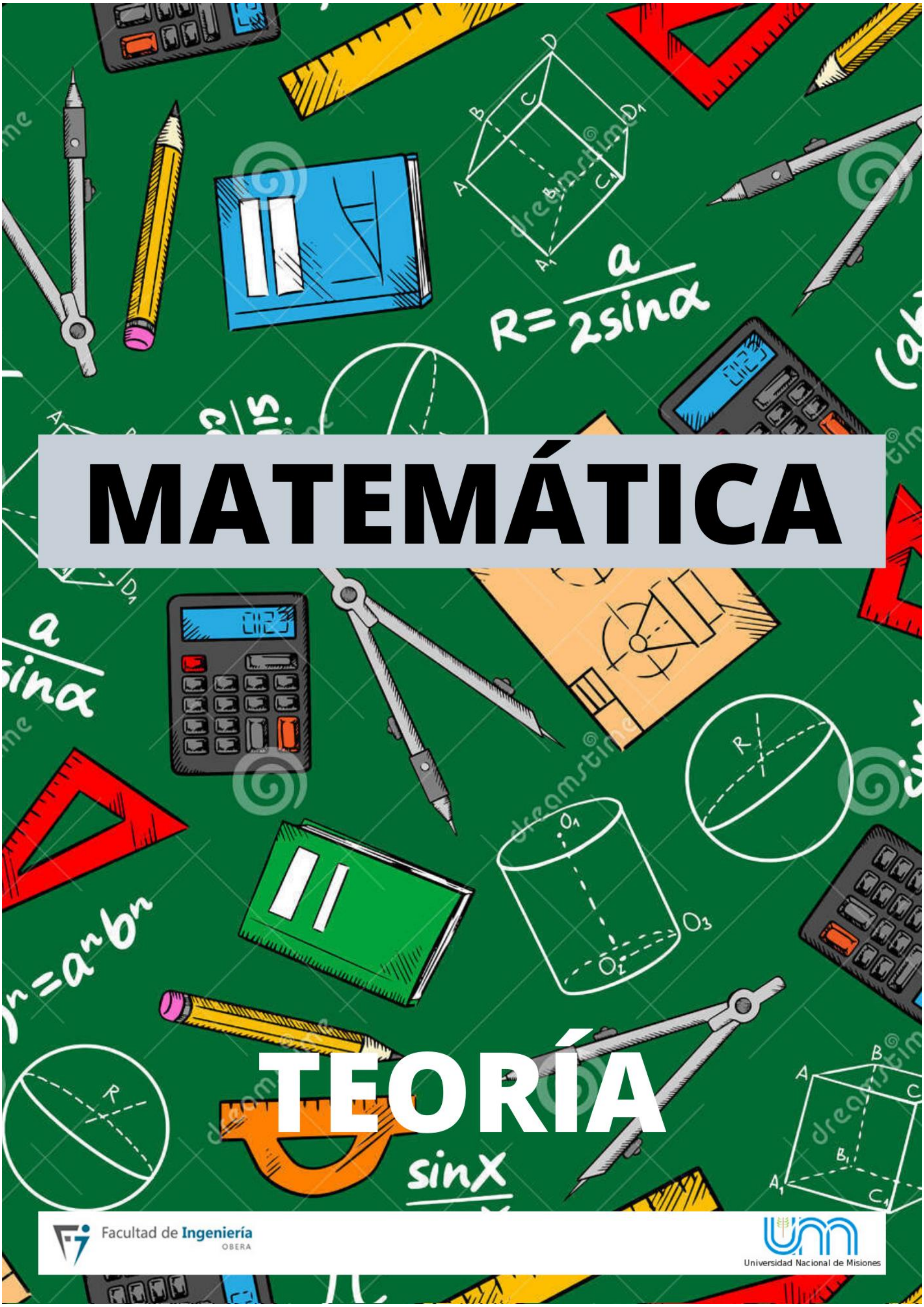


MATEMÁTICA

TEORÍA

Facultad de Ingeniería
OBERA

Universidad Nacional de Misiones

INGRESO – MATEMÁTICA - CONTENIDOS

Tema 1: Conjuntos Numéricos
Números: Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales y Reales. Operaciones y propiedades. Notación científica: aplicaciones. Orden. Representación en la recta numérica. Nociones básicas de logaritmo.

Tema 2: Funciones Polinómicas
Polinomios. Operaciones con polinomios. Divisibilidad de polinomios: Teorema del Resto y Teorema del factor. Factoreo. Proporcionalidad directa e inversa. Función lineal. Función cuadrática.

Tema 3: Ecuaciones, inecuaciones y Sistemas de Ecuaciones Lineales
Lenguaje coloquial y simbólico. Ecuaciones de primer grado con una y con dos variables. Solución analítica y gráfica. Inecuaciones de primer grado. Sistemas de dos ecuaciones con dos variables. Resolución analítica por igualación, sustitución o eliminación. Interpretación geométrica de las distintas soluciones.

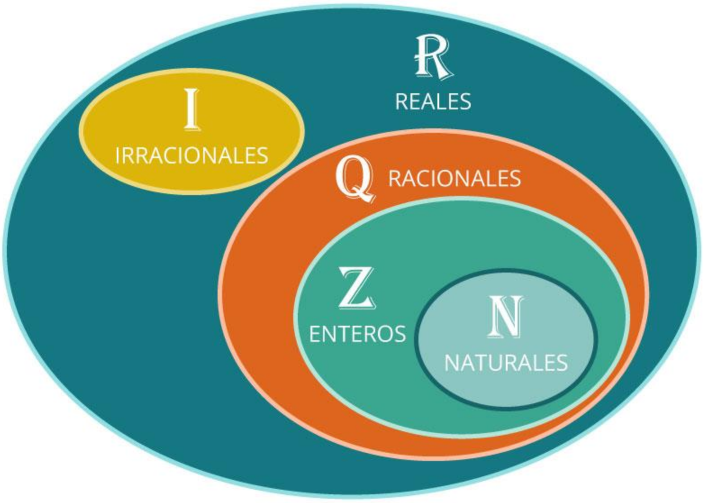
Tema 4: Trigonometría y Geometría
Sistemas de medición de ángulos. Relaciones trigonométricas de un ángulo. Relación fundamental de la trigonometría. Círculo trigonométrico. Aplicaciones: Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos. Estudio de áreas y perímetros de figuras planas y volumen y superficie de cuerpos geométricos.

1.1 TIPOS DE CONJUNTOS NUMÉRICOS

Este conjunto está formado por infinitos elementos algunos de ellos con características diferentes según se muestra en la siguiente tabla:

Tipo de conjunto	Símbolo	Características	Ejemplo
Naturales	N	Entre dos números naturales sucesivos no existe otro número natural	$0\,;1\,;2\,;3 \ldots \infty$
Enteros	Z	Entre dos números enteros sucesivos no existe otro número entero	$-\infty\,;-3;-2;-1\,;0\,;1\,;2\,;3 \ldots \infty$
Fraccionarios o racionales	Q	Están formados por la división entre dos números enteros	$-\infty\,;-\frac{6}{2};-\frac{5}{2};-1\,;0\,;1\,;2\,;3 \ldots \infty$
Irracionales	I	No se pueden expresar como cociente o razón entre dos números enteros	$-\infty\,;-\sqrt[3]{28};-\frac{5}{2};-1\,;0\,;1\,;2\,;3;\,\pi \ldots \infty$ $-\sqrt[3]{28}=-3{,}0362\ldots \quad \pi=3{,}14159\ldots$
Reales		Formado por la unión de los números racionales y los irracionales	

Utilizando la simbología de conjunto, cada uno de los subconjuntos mencionados se pueden visualizar a continuación:

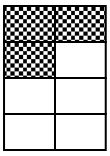


Algunas características que conviene resaltar son:

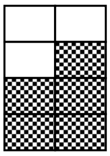
- Todos los números poseen infinitas cantidades.
- No todos los números poseen sucesor o antecesor.
- Entre dos números enteros sucesivos no existe otro número entero.
- Entre dos números racionales existen infinitos números racionales.
- Entre dos números reales existe siempre un número infinito de reales. Se dice que el conjunto de números reales es **denso**.
- Ningún número real tiene sucesor ni antecesor.
- El conjunto es un conjunto **totalmente ordenado** por la relación menor o igual.
- Es un conjunto continuo porque completa la recta numérica.

1.2 NÚMEROS FRACCIONARIOS

- Tomás comió tres de las ocho partes de las que constaba su tableta de chocolate,

Gráficamente →  numéricamente → $\frac{3}{8}$

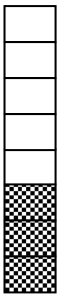
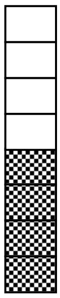
- A Tomás le sobran cinco de las ocho partes de las que constaba su tableta de chocolate,

Gráficamente →  numéricamente → $\frac{5}{8}$

Si se suman las partes que comió y las que sobraron corresponde a la tableta completa, es decir:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{8}{8}=1$$

Cómo se puede saber cuándo una fracción es mayor que otra. Por ejemplo cuál de las fracciones es la mayor, $\frac{3}{8}$ o $\frac{1}{2}$. Gráficamente para cada una:

$\frac{3}{8}$ →  y $\frac{1}{2}$ → 

A simple vista se observa que $\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$. Para comprobarlo analíticamente se debe cumplir que

$$\frac{3}{8}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3.2<8.1 \Leftrightarrow 6<8$$

1.3 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES NUMÉRICAS

Cuando se realizan operaciones con números (sumamos, restamos, multiplicamos, etc.) hay ciertas reglas que se deben respetar; a este conjunto de reglas se las denominan propiedades.
A continuación, se presentarán algunas de las propiedades utilizadas con más frecuencia. Se consideran a, b, c números que pertenecen a $\Re$ (esto significa que también se cumplen las propiedades en los otros conjuntos numéricos porque $\Re$ los incluye)

1) $a + b = b + a$ conmutatividad de la suma
2) $a \cdot b = b \cdot a$ conmutatividad del producto
3) $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ distributividad del producto respecto a la suma
4) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$ distributividad del cociente respecto de la suma

Cuidado, no existe la propiedad distributiva si la suma está en el denominador, es decir

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Por ejemplo: $\dfrac{6}{3+1} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$ y no es igual a $\dfrac{6}{3} + \dfrac{6}{1} = 8$

Las propiedades 3) y 4) valen también para la resta. Es decir

3') $c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$
4') $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c}$
5) Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
6) Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$
7) Si $a = b$ y $c \neq 0$ entonces $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$
8) Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$

1.4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica, es un sistema que permite expresar cualquier cantidad como el producto de un número entre 1 y 10 ($1 \leq a < 10$) multiplicado por una potencia de base 10 y exponente entero.
La notación científica permite trabajar con números muy grandes (como 123 450 000 000) o muy pequeños (como 0,000 000 000 212). Esta notación, utiliza potencias de base 10 para señalar la posición de la coma o punto decimal sin tener que manejar una gran cantidad de ceros.

1.4.1. Forma

En notación científica, expresamos cualquier cantidad como el producto de un número mayor igual a 1 y menor a 10, multiplicado por una potencia de base 10 y exponente entero.

El número «a» es llamado mantisa; mientras que el exponente «n» es el orden.

Veamos algunos ejemplos de números en notación científica:

3×10^{5}
8×10^{-7}
$1{,}3\times10^{-8}$
$2{,}9324\times10^{12}$
$5{,}32\times10^{-24}$

Ejemplos de números sin notación científica:

30×10^{5} : no se encuentra en notación científica, porque el valor de "a", no se encuentra entre 1 y 10, recordemos que en notación científica $1\leq a<10$.
8×100^{-7} : no se encuentra en notación científica, porque la potencia tiene base 100. En notación científica, se emplean potencias de base 10.
$1{,}3\times10^{-8{,}2}$: no se encuentra en notación científica, porque el exponente no es un número entero.

1.4.2. Cómo expresar un número en notación científica

En el siguiente cuadro, te mostramos como expresar un número en notación científica, partiendo de la clásica notación decimal.

Ejemplo 1:
Expresar los siguientes números pequeños en notación científica.

$0{,}02 = 2\times10^{-2}$
$0{,}001 = 1\times10^{-3}$
$0{,}000\,5 = 5\times10^{-4}$
$0{,}000\,53 = 5{,}3\times10^{-4}$
$0{,}000\,000\,043 = 4{,}3\times10^{-8}$
$0{,}000\,000\,000\,403\,8 = 4{,}038\times10^{-10}$

Ejemplo 2:
Expresar los siguientes números grandes en notación científica.

$500 = 5\times10^{2}$
$1\,200 = 1{,}2\times10^{3}$
$25\,000 = 2{,}5\times10^{4}$
$25\,600 = 2{,}56\times10^{4}$
$520\,000 = 5{,}2\times10^{5}$
$4\,038\,000\,000\,000 = 4{,}038\times10^{12}$

1.5. REGLA DE SIGNOS

12) $-(-a) = a$
13) $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b)$
14) $(-1)\cdot a = -a$

Y finalmente una regla importante que nos conviene tener en cuenta cuando se operan con fracciones:

15) $\frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b} = a\cdot b^{-1}$

1.6. MODULO DE UN NUMERO REAL

El **módulo** o **valor absoluto** de un número real x es la distancia entre ese número y cero. Se simboliza así: $|x|$

$$\text{Si } x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$
$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

Ejemplo: $|2.5| = |-2.5| = 2.5$

1.6.1. PROPIEDADES DEL MÓDULO

1. $|a| = |-a| \geq 0$
2. $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ con b $\neq$ 0

4. Desigualdad triangular: $|a+b| \leq |a| + |b|$

5. $|a-b| \geq |a| - \cdot |b|$

Ejemplo: Resolver la ecuación: $\left|\frac{x}{-5}\right| + |x| = 6$

Aplicando la propiedad 3 en el primer término del primer miembro se tendrá:

$\frac{|x|}{|-5|} + |x| = 6$; Como $|-5|$ = 5, queda

$\frac{|x|}{5} + |x| = 6$

Factoreando $|x|$

$$\left(\frac{1}{5}+1\right)|x| = 6$$

$$\frac{6}{5}|x| = 6$$

Multiplicando miembro a miembro por $\frac{5}{6}$

$$|x| = \frac{5}{6}.6 = 5$$

Por definición $|x| = 5 \Rightarrow x = 5 \vee x = -5$

El signo "$\vee$" matemáticamente significa "y" por lo tanto los valores que puede tener x expresados con la simbología de conjuntos es $S = \{-5 \;;\; 5\}$, solo esos únicos dos valores.
Comprobación.

$Para\ x = -5$	$Para\ x = 5$
$\left\|\frac{x}{-5}\right\| + \|x\| = 6$	$\left\|\frac{x}{-5}\right\| + \|x\| = 6$
$\left\|\frac{-5}{-5}\right\| + \|-5\| = 6$	$\left\|\frac{5}{-5}\right\| + \|5\| = 6$
$1+5=6$	$1+5=6$

1.7. OPERACIONES EN LOS DIFERENTES CONJUNTOS NUMÉRICOS

1.7.1 SUMA Y RESTA DE NÚMEROS RACIONALES

Para sumar o restar fracciones de igual denominador, el resultado es otra fracción de igual denominador que las dadas, y cuyos numeradores se obtienen sumando o restando los numeradores dados.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Cuando sumamos o restamos fracciones de distinto denominador, buscamos fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} \pm \frac{c.b}{d.b} = \frac{a.d \pm c.b}{b.d}$$

1.7.2 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

El procedimiento para multiplicar fracciones es el de multiplicar numeradores y denominadores entre sí. En símbolos:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

El procedimiento para dividir fracciones es el de multiplicar el numerador de la primera con el denominador de la segunda para encontrar el numerador del cociente y viceversa para el denominador del cociente. En símbolos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

1.8. POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La potenciación es la forma de abreviar el producto de varios números iguales. Por ejemplo:

$$a.a.a.a.a = a^5$$

Las propiedades de la potenciación pueden deducirse en forma práctica como sigue:

$$\frac{a.a.a.a.a}{a.a.a.a} = \frac{a^5}{a^4} = a^{5-4} = a^1 = a$$

Otra propiedad dice que todo número elevado a la cero es 1 siempre que ese número sea distinto de cero. Por ejemplo:

$$\frac{a.a.a.a.a.a.a}{a.a.a.a.a.a.a} = \frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0 = 1$$

Se comprueba fácilmente si se simplifica cada uno de los factores del numerador con los del denominador.

Los exponentes negativos se explican cuando el denominador contiene más factores iguales que el numerador, por ejemplo:

$$\frac{a.a.a.a}{a.a.a.a.a.a.a} == \frac{1}{a^3} = \frac{a^0}{a^3} = a^{0-3} = a^{-3}$$

Cuando se tiene potencias de potencias de igual base el resultado se obtiene multiplicando los exponentes según se demuestra a continuación:

$$(a^2)^3 = (a.a).(a.a).(a.a) = a.a.a.a.a.a = a^6 = a^{2.3}$$

1.9. RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Es una operación similar a la potenciación que consiste en, dado un valor numérico, determinar cuántas veces se debe multiplicar un mismo número para encontrar tal valor numérico, es decir:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

Otra nomenclatura para expresar lo mismo es $8^{1/3} = 2$

Como se vio, $2^3 = 8$ por lo tanto se puede escribir $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3} = 2$

Finalmente se puede simbolizar una potencia en sus dos nomenclaturas como:

$$\sqrt[c]{a^b} = a^{b/c}$$

La última forma de expresar la radicación ayuda a realizar operaciones con potencias a saber:

$\sqrt[3]{a} \,.\, \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{1}{3}} \,.\, a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}} = a^{\frac{5+6}{15}} = a^{\frac{11}{15}}$ → Potencias de igual base se SUMAN los exponentes.

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{4}{15}}$ → Potencia de potencia se MULTIPLICAN los exponentes.

1.9.1 SUMA Y RESTA DE RADICALES

- **Radicales semejantes:** son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando.
  Al sumar o al restar radicales semejantes, se obtiene una expresión de un solo término.
  Ejemplo: $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

- Se pueden **extraer del radical** todos los factores cuyos exponentes sean mayores o iguales que el índice. Para ello, se factoriza el radicando, se descomponen los factores en forma conveniente, se distribuye la raíz con respecto al producto y se simplifica.
  Ejemplo: $\sqrt[3]{4000} = \sqrt[3]{2^5.5^3} = \sqrt[3]{2^3.2^2.5^3} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^2}.\sqrt[3]{5^3} = 2.5.\sqrt[3]{2^2} = 10.\sqrt[3]{2^2}$

Para sumar o para restar radicales, se procede de la siguiente manera:

- Si los radicales son números compuestos, se factorizan.
- Se simplifican todos los radicales posibles.
- Se extraen todos los factores posibles de cada radical.
- Si hay radicales semejantes, se agrupan en un solo termino.
- La suma o la resta de radicales no semejantes se deja expresada.

Ejemplo: $\sqrt[4]{9} - \sqrt{48} + \sqrt{8} = \sqrt[4]{3^2} - \sqrt{2^4.3} + \sqrt{2^3} = \sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = -3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

1.9.2 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Si los radicales tienen igual índice, se aplican estas fórmulas

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Radicales de índices distintos: se buscan radicales equivalentes de modo tal que todos tengan el mismo índice. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{3}.\sqrt{2}.\sqrt[4]{125} = 3^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{2}}.125^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{4}{12}}.2^{\frac{6}{12}}.5^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{3^4.2^6.5^9}$$

Racionalización de Denominadores:

Consiste en transformar una expresión que contiene radicales en su denominador en otra equivalente, cuyo denominador sea racional.

Ejemplos:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{6-2\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{9-5}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Exponentes Racionales

Para cualquier número n natural mayor que 1 y $a \geq 0$ se cumple que: $a^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{a^k}$

Las potencias de exponente racional cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.

Para operar, en algunos casos conviene expresar los radicales como potencias y trabajar con estas aplicando sus propiedades.

Ejemplo: $\sqrt{5}.\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=5^{\frac{5}{6}}$

1.10. LOGARITMO DE UN NÚMERO REAL

La potenciación posee dos operaciones inversas, la radicación y la logaritmación. A continuación se muestran dos ecuaciones donde se desea determinar el valor de “x”, estas son: $4=x^2$ y $9=3^x$

Intuitivamente o calculando mentalmente se llega a la conclusión que $x=2$. Por lo tanto para el primer caso $4=x^2 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt[2]{4}=2$

Para el segundo caso la situación se complica si se desea determinar el valor de x para la expresión $9=4^x$. Aquí es necesario utilizar el concepto de logaritmo y sus propiedades.

En esta expresión la base es 4 y el exponente es la incógnita.

Por lo tanto se define el logaritmo en base “b” de un número “a” es el número c, si se cumple que “b” elevado al exponente “c” da como resultado “a”.

En símbolos: $\boxed{\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a}$

b → es la *base* del logaritmo y debe ser un número real positivo y distinto de 1.

a → es el *argumento* del logaritmo y debe ser un número real positivo.

Para el ejemplo $9=4^x$ se tiene

$$9=4^x$$
$$x=\log_4 9$$

Aquí es fundamental el uso de la calculadora, pero de fábrica las mismas solo indican logaritmos en base decimal (10) y natural ($e = 2{,}718281828\ ...$). Están indicados como log y ln respectivamente.

Propiedades de los Logaritmos

1) $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

2) $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3) $\log_b\left(x^y\right) = y \cdot \log_b x$

4) Cualquiera sea a : $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$

Cambio de base: Supongamos que queremos averiguar $\log_3 243$ utilizando la calculadora científica.

Para pensar y completar…

Podemos proceder así: según la definición de logaritmo, $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243$

Aplicamos logaritmos decimales a ambos miembros $\longrightarrow$ $\log 3^x = \log$ ………

Aplicamos la propiedad para "bajar" el exponente $\longrightarrow$ $x \times$ ……. = ……….

Despejamos x = ——— ; pero $x = \log_3 243$, entonces $\log_3 243 = \dfrac{\log 243}{\log 3} =$ ………….

Este procedimiento se llama cambio de base, y nos permite cambiar la base b de un logaritmo por otra más conveniente (hemos elegido base 10, pero podríamos haber elegido cualquier otra).

Si llamamos w a la base elegida, podemos aplicar directamente la siguiente fórmula:

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log_w a}{\log_w b}}$$

Así podemos obtener con la calculadora científica el logaritmo de un número en cualquier base. La nueva base que elegimos será 10 o e

Por ejemplo: $\log_3 230 = \dfrac{\log 230}{\log 3}$ = ………….. Este logaritmo se resuelve utilizando la calculadora científica.

Una cuestión de notación...

- $\log_b^n(a) = [\log_b(a)]^n$
- Cuando leamos log a sin hacer referencia a la base b se entenderá que no referimos a la base 10, es decir, b = 10. Las calculadoras toman esta convención.

Tema 2: FUNCIONES POLINÓMICAS

2.1 POLINOMIOS

La palabra polinomio significa muchos términos y como ejemplo se muestra una expresión polinómica donde se identificarán cada una de sus características a saber:

$$P(x) = 5x^3 + 7x^2 + 4x - 12$$

1- Los términos del polinomio presentan un coeficiente numérico y la variable que en este caso está dada por "x". Por lo tanto, es un polinomio en la variable x.
2- Cada término está separado por los signos más o menos.
3- El grado de un polinomio es el exponente al que está elevada la variable y debe ser un número natural. En este caso es de tercer grado, porque la tercera es la máxima potencia a la que está elevada la variable "x" que aparece en él.

Por consiguiente, las expresiones que se muestran a continuación no son polinomios, porque no contienen exponentes naturales.

$$x^3 + x^{1/2}$$
$$x^{-2} + 3x + 1$$

Los polinomios que tienen sólo uno, dos o tres términos reciben nombres especiales:

Números de Términos	Nombre del polinomio	Ejemplos
Uno	monomio	$P(x) = 17x^5$
Dos	binomio	$Q(x) = 2x^3 - 6x$
Tres	trinomio	$R(x) = x^4 - x^2 + 2$
Cuatro	cuatrinomio	$S(x) = 3x^4 - x^2 + 2x + 10$

La variable *"x"* en el polinomio representa cualquier número real. Por este motivo representan también números reales, cuyo valor depende del que tome la variable, por ejemplo, para el valor x=3 se tendrá:

$$P(x) = 5x^3 + 7x^2 + 4x - 12$$
$$P(3) = 5(3)^3 + 7(3)^2 + 4(3) - 12$$
$$P(3) = 5.27 + 7.9 + 4.3 - 12$$
$$P(3) = 135 + 63 + 12 - 12 = 198$$

Ya que cada símbolo de un polinomio es un número real, se pueden usar las propiedades del sistema de los números reales para operar con ellos.

En general:

Un polinomio de grado "n" en la variable "x" se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas estándar:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

Donde los coeficientes $a_n, a_{n-1} \ldots a_1, a_0$ son números reales, y los exponentes son enteros no negativos. El **coeficiente principal** es $a_n \neq 0$, y a_0 es el **término constante**

Cabe aclarar que también se puede considerar que a_0 es el coeficiente del término $a_0 x^0$.

2.2 OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

2.2.1 Suma de polinomios

Cuando se suman dos polinomios, el resultado es otro polinomio.

$$P(x) + Q(x) = S(x)$$

Al efectivizar dichas operaciones se suman o restan los coeficientes respectivos de iguales potencias de la variable, es decir se agrupan los términos semejantes (propiedad asociativa y conmutativa), para operar con ellos, o bien, se aplica la propiedad distributiva.

Por ejemplo, sean los polinomios: $P(x) = (2x^2 + x - 1)$ y $Q(x) = (3x + 2)$, hallar la suma de ambos.

Solución:

$(2x^2 + x - 1) + (3x + 2)$	se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,
$2x^2 + x - 1 + 3x + 2$	se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las
$2x^2 + (x + 3x) - 1 + 2$	propiedades conmutativa y asociativa,
$2x^2 + 4x + 1$	se suman los coeficientes de las potencias iguales de *x.*

¿Por qué no es válido sumar los términos $2x^2$ y $4x$?

2.2.2 Resta de polinomios

Cuando se suman dos polinomios, el resultado es otro polinomio.

$$P(x) - Q(x) = S(x)$$

Por ejemplo, sean los polinomios: $P(x) = (2x^2 + x - 1)$ y $Q(x) = (3x + 2)$, hallar la suma de ambos.

Solución:

$(2x^2 + x - 1) - (3x + 2)$ $2x^2 + x - 1 - 3x - 2$	Se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis cambiando el signo a cada uno de sus términos.
$2x^2 + (x - 3x) - 1 - 2$	se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,
$2x^2 - 2x - 3$	se suman los coeficientes de las potencias iguales de *x.*

Intentar lo siguiente

Dado los siguientes polinomios

$P(x) = 3x^2 + 4x - 2x$ $\qquad$ $Q(x) = -2x^2 + 3x + 1/2$

$R(x) = 5x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3$ $\qquad$ $S(x) = 5x^4 + 2x^2 - 2x + 4$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $P(x) + S(x)$ $\qquad$ b) $R(x) - P(x)$ $\qquad$ c) $S(x) - S(x)$

d) $Q(x) + P(x)$ $\qquad$ e) $R(x) - S(x)$

¿Qué se puede decir del grado del polinomio obtenido al sumar o restar dos polinomios?

2.2.3 Producto entre polinomios

Cuando se multiplican dos polinomios el resultado es otro polinomio, obtenido de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y las leyes de los exponentes.

$$P(x).Q(x) = T(x)$$

Veamos a través del siguiente ejemplo:

Sean. $P(x) = 2x - 3$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 1$
Hallar $P(x).Q(x)$

Cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo:

Solución:

$$P(x)Q(x) == 2x.(x^2) + 2x(2x) + 2x(-1) + (-3).(x^2) + (-3)(2x) + (-3)(-1)$$
$$P(x)Q(x) == 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3x^2 - 6x + 3$$

Se asocian términos semejantes y se encuentra el resultado final

$$P(x)Q(x) == 2x^3 + (4x^2 - 3x^2) + (-2x - 6x) + 3$$
$$P(x)Q(x) == 2x^3 + x^2 - 8x + 3$$

Intentar lo siguiente

Dados los siguientes polinomios

$P(x) = -3x$ $\qquad$ $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

$R(x) = x^2 - 3x + 5$ $\qquad$ $S(x) = 2x^3 - 3x$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $P(x)S(x)$ $\qquad$ b) $R(x)S(x)$ $\qquad$ c) $Q(x)R(x)$

¿Cómo se calcularían las siguientes potencias: $[S(x)]^2$; $[P(x)]^3$; $[Q(x)]^2$?.

2.2.3.1 Productos notables

Resolver los siguientes productos entre binomios:

a) $(A+B)(A+B)$ $\qquad$ b) $(A-B)(A-B)$

c) $(A+B)(A-B)$ $\qquad$ d) $(A+B)^2(A+B)$

Donde A y B representan monomios cualesquiera.

¿Qué se puede decir de los polinomios obtenidos? Caracterizarlos.

A continuación se ejemplifica lo solicitado en el ítem d) $(A+B)^2(A+B)$
Por definición de potencia podemos escribir:

$$\begin{aligned}(A+B)^2(A+B) &= [(A+B)(A+B)](A+B)\\ &= [A^2 + 2AB + B^2](A+B)\\ &= A^2(A+B) + 2AB(A+B) + B^2(A+B)\\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + B^2A + B^3\\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\end{aligned}$$

El polinomio obtenido es un **cuatrinomio cubo perfecto.**

Resolver: a) $(4x+-5)^3$ b) $(2x^2 + x^3)^2$ c) $(4x + x^3)\,(4x + x^3)$.

2.2.4 División de polinomios

La división de polinomios se realiza con un algoritmo similar al de la división entera.

> Recordemos el algoritmo de la división entera
>
> $$\begin{array}{l|l} D \text{ (dividendo)} & d \text{ (divisor)} \\ \hline R \text{ (resto)} & C \text{ (cociente)} \end{array} \rightarrow D = C \,.\, d + R \qquad \begin{array}{l|l} 15 & 6 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \rightarrow 15 = 6.2+3$$
>
> Se sabe que, en este algoritmo, el divisor (d) nunca es cero y el resto (R) es menor que el divisor y se cumple que D = d ·C + R. Es decir, que el dividendo (D) es igual al divisor (d) por el cociente (C) más el resto (R).

Para que la división entre polinomios sea otro polinomio, el divisor debe ser de grado igual o menor que el del dividendo.

Luego, en el caso de la división de polinomios, se cumple:

$$\boxed{P(x) = Q(x).C(x) + R(x)}$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Dividir el polinomio $P(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ por $Q(x) = x^2 + x$

Solución:

$$\begin{array}{lrl l}
\text{Dividendo } [P(x)] \rightarrow & 3x^3 - x^2 - 2x + 6 & \left| \underline{x^2 + x} \right. & \rightarrow \text{Divisor } [Q(x)] \\
& -\underline{3x^3 - 3x^2 \qquad\qquad} & 3x - 4 & \rightarrow \text{Cociente } [C(x)] \\
& -4x^2 - 2x + 6 & & \\
& \underline{4x^2 + 4x \quad .} & & \\
& 2x + 6 & \rightarrow & \text{Resto } [R(x)]
\end{array}$$

El procedimiento es el siguiente:

1. Se escriben los polinomios dividendo y divisor ordenados en forma decreciente
2. Se divide $3x^3$ (el primer término del dividendo) por x^2 (el primer término del divisor), para obtener 3x (el primer término del cociente).
3. Se multiplica $x^2 + x$ (el divisor) por 3x y se obtiene $3x^3 + 3x^2$.
4. Se cambia de signo obteniéndose $- 3x^2 - 3x$ y se coloca debajo de los términos correspondientes en el dividendo.

5. Se suma para obtener - $4x^2$, y se escriben a continuación los demás términos del polinomio dividendo, el polinomio obtenido se trata como el nuevo dividendo.
6. Se divide - $4x^2$ (el primer término del nuevo dividendo) por x^2, se obtiene - 4 (el segundo término del cociente).
7. Se multiplica $x^2 + x$ por - 4 y se suma el producto del nuevo dividendo cambiado de signo. Este resultado, $2x + 6$, representa el resto de la división debido a que es un polinomio de grado menor que el grado del divisor, por lo tanto, la división está terminada.

Como el resto no es cero, el polinomio dividendo no es múltiplo del divisor. Según la relación de la división entera, el polinomio dividendo se podrá escribir como:

$$3x^3 - x^2 - 2x + 6 = (x^2 + x) \cdot (3x - 4) + (2x + 6)$$

$$\mathrm{P}(x) \quad = \quad \mathrm{Q}(x) \quad \cdot \quad \mathrm{C}(x) \quad + \quad \mathrm{R}(x)$$

Analicemos otro ejemplo:

Dados los polinomios $\mathrm{P}(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ y $\mathrm{Q}(x) = x^2 + 2$, efectuar el cociente P(x):Q(x)

Solución:

$$\begin{array}{llll}
\text{Dividendo } [\mathrm{P}(x)] \rightarrow & x^4 - 2x^2 - 8 & \underline{x^2 + 2} \,| & \rightarrow \text{Divisor } [\mathrm{Q}(x)] \\
& \underline{-x^4 - 2x^2} & x^2 - 4 & \rightarrow \text{Cociente } [\mathrm{C}(x)] \\
& \quad - 4x^2 - 8 & & \\
& \quad \underline{4x^2 + 8} & & \\
& \qquad\quad 0 & \rightarrow \text{Resto } [\mathrm{R}(x)] &
\end{array}$$

Como en este caso el resto es 0, el polinomio dividendo es múltiplo del divisor y la relación anterior se reduce a: P(x) = Q(x) C(x) poniendo en evidencia la posibilidad de escribir el polinomio dividendo como un producto de factores: $x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 + 2)\,(x^2 - 4)$.

Intentar lo siguiente

i) Usar el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios.

   a) $(x^3 - x^2 - x + 10) : (x^2 - 3x + 5)$
   b) $(5x^2 + 7x + x^3 + 8) : (x - 2)$
   c) $(4x^3 - 5x^2 + x - 7) : (x^2 - 2x)$
   d) $(x^3 - 2x^2 - 13x + 6) : (x + 3)$

ii) Verificar cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto: P(x) = Q(x) C(x) + R(x).

Analizar la validez de la siguiente afirmación:

“La expresión $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, representa el resultado de la división de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$”

2.2.4.1 División de un polinomio por un monomio de la forma $(x - c)$

Cuando se realiza la división entera de un polinomio P(x) por un binomio de la forma x - c, donde **c** es un número real, puede ocurrir que el resto sea de grado cero o que sea el polinomio nulo. Por lo tanto, el resto es un número que se designará con R.

El siguiente teorema relaciona el resto R(x) obtenido mediante la división de un polinomio P(x) por (x – c) y el valor del polinomio en x = c.

> **Teorema del resto**: "Cuando un polinomio P(x) se divide por x – c, el resto R es el valor del polinomio en x = c, esto es, R = P(c)."

En efecto:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - c \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} P(x) = (x - c) \cdot C(x) + R \\ P(c) = (c - c) \cdot C(x) + R \\ \text{Luego} \quad P(c) = R \end{array}$$

Por ejemplo: si P(x) = $x^3 - 3x^2 + 4$, es posible anticipar cuál será el resto de dividirlo por x – 1, ya que según el teorema se tendrá:

$$R = P(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 2$$

También se puede escribir P(x) en términos de x – 1 encontrando el cociente C(x) y utilizando la expresión de la división entera:

$$P(x) = (x - 1)\ C(x) + 2$$

Si P(c) = 0, entonces x = c se constituye en una raíz de P(x), quedando P(x) expresado como un producto, es decir P(x) está factorizado:

$$P(x) = (x - 1)\ C(x)$$

Así, si el divisor fuera x - 2, se tiene que P(2) = $2^3 - 3.2^2 + 4 = 0$, por consiguiente x – 2 será un factor de P(x) y podrá expresarse de la siguiente manera:

$$P(x) = (x - 2)\ (x^2 - x - 2)$$

donde C(x) = $x^2 - x - 2$ es el cociente de la división, el cual puede obtenerse fácilmente mediante la regla de Ruffini.

A continuación, se recuerda el algoritmo correspondiente a la regla de Ruffini:

1. En el primer renglón se escriben los coeficientes del dividendo (el cual debe estar completo y ordenado en forma decreciente). A la izquierda, sólo se escribe la raíz del divisor (el valor que lo anula).

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Los demás coeficientes se obtienen de la siguiente forma:

2. El coeficiente principal del dividendo (1) se copia abajo. Se lo multiplica por 2 y el resultado (2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (-3). Se suman -3 y 2 y el resultado (-1) se escribe abajo.

	1	-3	0	4
2		2		
	1	-1		

3. El -1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (– 2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (0). Se suman 0 y – 2 y el resultado (-2) se escribe abajo.

	1	-3	0	4
2		2	-2	
	1	-1	-2	

4. El -2 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (– 4) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (4). Se suman 4 y – 4 y el resultado (0) es el resto. Se escribe abajo.

	1	-3	0	4
2		2	-2	-4
	1	-1	-2	0

El resto es 0. Los valores 1, –1 y –2 son los coeficientes del polinomio cociente: C(x) = $x^2 - x$-2, cuyo grado es en una unidad menor que el del polinomio dividendo.

Recuerda que la Regla de Ruffini sólo se podrá aplicar en cocientes donde el divisor es de la forma x – c.

Conviene tener presente que:

Decir que P(c) = 0, equivale a decir que:

- (x – c) divide exactamente a $\mathbf{P}(x)$ o que $\mathbf{P}(x)$ es divisible por (x – c),
- P(x) podrá expresarse como el producto: P(x) = (x – c).C(x) donde C(x) es el polinomio cociente entre P(x) y x – c.

Intentar lo siguiente

Dadas las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6):(x - 3)$
b) $(x^3 + 5x^2 - 7x + 8):(x - 2)$
c) $(2x^3 + x^2 - 3x + 7):(x + 1)$
d) $(x^3 + 27):(x + 3)$

i) Utilizar el Teorema del Resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.

ii) Cuando sea posible, factorizarlo en término del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

2.3. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio significa expresar al polinomio como **el producto** de dos o varios monomios, binomios, trinomios, etc.

Hay seis maneras básicas de factorizar un polinomio, y normalmente reciben el nombre de **casos de factoreo**:

- 1º Caso: Factor común.
- 2º Caso: Factor común en grupos.
- 3º Caso: Trinomio cuadrado perfecto (cuadrado de un binomio)
- 4º Caso: Cuatrinomio cubo perfecto (cubo de un binomio)
- 5º Caso: Diferencia de cuadrados.
- 6º Caso: suma y resta de potencia de igual exponente (Gauss).

2.3.1. 1º Caso: Factor común

Para factorizar un polinomio a través de factor común, debemos acordarnos de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma o resta.
$a.(b \pm c) = ab \pm ac$ (el factor a se repite en ambos términos)
Para extraer el factor común, se debe proceder de manera inversa: $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$
Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.
El factor común puede ser la variable del polinomio, elevada a la menor potencia, y/o el Divisor común múltiplo de todos los coeficientes del mismo.

Ejemplos:
Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 2x^2 - 4x$ $(se\ ve\ que\ son\ comunes, una\ x\ en\ cada\ término, y\ el\ 2)$.
$P(x) = 2x.x - 2.2x \quad \longrightarrow 2x\ es\ el\ factor\ común\ de\ los\ dos\ términos.$
$P(x) = 2x.(x \quad - \quad 2)$
$\longrightarrow Expresión\ factoreada\ de\ P(x) a\ través\ del\ factor\ común.$
$\frac{\mathbf{2x^2}}{\mathbf{2x}} \; - \; \frac{\mathbf{4x}}{\mathbf{2x}}$

b) $P(x) = -12x^6 + 6x^5 - 15x^3 = -4.3x^3.x^3 + 2.3x^3.x^2 - 5.3x^3 = 3x^3(-4x^3 + 2x^2 - 5)$

<u>Normalizar polinomio</u>
Para normalizar un polinomio, se debe **sacar como factor común el coeficiente principal**.

$$P(x) = 2x^2 - \frac{1}{3} = 2.\left(\frac{2x^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{2}\right) = 2.\left(x^2 - \frac{1}{6}\right)$$

2.3.2. 2º Caso: Factor común en grupos

El método es similar al 1º Caso, es como separar el polinomio en dos partes y luego aplicar en cada una de esas partes el 1º Caso.
Se debe “partir” el polinomio en dos partes, porque en la primera de esas partes va a haber “algo” en común, y en la segunda vamos a encontrar otra cosa común. Lo que se busca es que lo que queda “dentro del paréntesis” en cada una de las partes, sea lo mismo, para luego unir esas dos partes que quedaban del polinomio, mediante otro factor común (1º Caso).

Ejemplos:

a) $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x + 6$

$P(x) = \underbrace{(x^5 - 2x^4)}_{x^4} + \underbrace{(-3x + 6)}_{-3}$ ⟶ Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que cada uno de ellos haya un factor común.

$P(x) = x^4(x - 2) - 3(x - 2)$ ⟶ En cada término debe aparecer el mismo factor para poder extraerlo nuevamente como factor común.

$P(x) = (x - 2).(x^4 - 3)$ ⟶ Al sacar nuevamente factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

c) $Q(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (3x^3 + 3x^2) + (2x + 2) = 3x^2(x + 1) + 2(x + 1)$
$Q(x) = (x + 1).(3x^2 + 2)$

2.3.3. 3º Caso: Trinomio cuadrado perfecto

Primeramente, recordemos la **fórmula del cuadrado de un binomio**

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Lo que tenemos que hacer para factorizar un polinomio por este método, **es asegurar que un polinomio de 3 términos sea equivalente a un binomio elevado al cuadrado**, y luego escribir el polinomio como un **binomio al cuadrado.**

Para poder aplicar este método, el polinomio debe tener tres términos (ni más ni menos). Pero claro, no cualquier polinomio de tres términos es el cuadrado de un binomio. Más allá de tener tres términos, tenemos que ver que dos de esos términos sean el cuadrado de “algo”, y también tenemos que verificar que el otro término que queda sea el doble del producto de esos “algo”.

Ejemplo:

Factorizar el siguiente polinomio: $P(x) = 9x^2 + 30x + 25$

- Lo comparamos con el cuadrado de un binomio:

$$\begin{array}{rccc} P(x) = & 9x^2 & +30x & +25 \\ (a \pm b)^2 = & a^2 & \pm 2ab & +b^2 \end{array}$$

Entonces, si $a^2 = 9x^2 \rightarrow a = \sqrt{9x^2} = \sqrt{9}.\sqrt{x^2} = 3x$
si $b^2 = 25 \rightarrow b = \sqrt{25} = 5$

Vemos que $a = 3x \;\; y \;\; b = 5 \Rightarrow 2ab = 2.3x.5 = 30x$

Concluimos que: $P(x) = 9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$

2.3.4. 4º Caso: Cuatrinomio cubo perfecto

Primeramente, recordemos **la fórmula del cubo de un binomio**

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$$

Lo que se tiene que hacer para factorizar un polinomio por este método **es asegurar que un polinomio de 4 términos sea equivalente a un binomio elevado al cubo.** La manera de factorizar el polinomio es similar a la usada en el caso anterior. Más allá que para aplicar este método “tenemos que tener” un polinomio de 4 términos, dos de ellos tienen que equivaler a "algo elevado al cubo". Luego debemos verificar si los otros dos términos restantes coinciden con los de la fórmula del cubo de un binomio.

Ejemplo:
Factorizar el siguiente polinomio: $P(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
- Lo comparamos con el cubo de un binomio:

$$\begin{array}{rccccc} P(x) = & 8x^3 & +36x^2 & +54x & +27 \\ (a \pm b)^3 = & a^3 & \pm 3a^2b & +3ab^2 & \pm b^3 \end{array}$$

Entonces, si $a^3 = 8x^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{x^3} = 2x$
si $b^3 = 27 \rightarrow b = \sqrt[3]{27} = 3$
Vemos que $a = 2x \;\; y \; b = 3 \;\Rightarrow 3a^2b = 3.(2x)^2.3 = 3.4x^2.3 = 36x^2$
$\Rightarrow \pm 3ab^2 = 3.(2x).3^2 = 3.2x.9 = 54x$

Concluimos que: $P(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x + 3)^3$

2.3.5. 5º Caso: diferencia de cuadrados

Este caso es el más fácil de reconocer, porque para factorizar un polinomio por este método, el polinomio debe tener sólo dos términos, y cada uno de ellos debe ser el cuadrado de "algo". Además, **deben estar separados por un signo menos.**
La fórmula que utilizaremos es: $\boxed{a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)}$

Se factorizará el polinomio por el método de **diferencia de cuadrados**, es escribir el polinomio como la suma de las bases, multiplicado por la resta de las mismas (en la fórmula anterior las bases son a y b).

Ejemplo:
Factorizar el siguiente polinomio: $P(x) = x^2 - 4$
Entonces, si $a^2 = x^2 \rightarrow a = \sqrt{x^2} = x$
si $b^2 = 4 \rightarrow b = \sqrt{4} = 2$
Concluimos que $P(x) = x^2 - 4 = (x + 2).(x - 2)$

Otro ejemplo:
Factorizar el siguiente polinomio: $P(x) = 9x^6 - 1$
Entonces, si $a^2 = 9x^6 \rightarrow a = \sqrt{9x^6} = \sqrt{9}.\sqrt{x^6} = 3x^3$
si $b^2 = 1 \rightarrow b = \sqrt{1} = 1$
Concluimos que $P(x) = 9x^6 - 1 = (3x^3 + 1).(3x^3 - 1)$

2.3.6. 6º Caso: suma o resta de potencias de igual exponente

Para factorizar un polinomio por este método, **dicho polinomio debe constar de dos términos sumados o restados**, elevados a la misma potencia.
Por lo tanto el polinomio debe ser de la forma: $\boxed{P(x) = x^k \pm b^k}$

Lo que se hace para factorizar un polinomio de estos, es dividirlo usando el método de Ruffini, y para saber porque binomio dividir, debemos tener en cuenta lo siguiente:

$$Cuando\ k\ es\ un\ número\ impar \begin{cases} *\ Si\ el\ signo\ es\ un\ MENOS\ se\ divide\ por\ (x-b) \\ *\ Si\ el\ signo\ es\ un\ MÁS\ se\ divide\ por\ (x+b) \end{cases}$$

$$Cuando\ k\ es\ un\ número\ par \begin{cases} *\ Si\ el\ signo\ es\ un\ MENOS\ se\ puede\ dividir\ por\ (x-b)\ o\ por\ (x+b) \\ *\ Si\ el\ signo\ es\ un\ MÁS\ no\ se\ puede\ dividir\ al\ polinomio\ por\ nada \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $P(x) = x^5 + 2^5 \rightarrow el\ exponente\ es\ impar, el\ signo\ un\ más\ \Rightarrow dividimos\ por\ (x + 2)$
2) $Q(x) = x^3 - y^3 \rightarrow exponente\ impar, signo\ menos\ \Rightarrow dividimos\ por\ (x - y)$
3) $R(x) = x^6 + y^6 \rightarrow exponente\ par, signo\ más \Rightarrow no\ se\ puede\ dividir\ por\ nada.$
4) $S(x) = x^8 - y^8 \rightarrow exponente\ par, signo\ menos \Rightarrow dividimos\ por\ (x - y)\ o\ (x + y)$

Ejemplo completo
Factorizar $P(x) = x^3 - 8$
El polinomio se puede escribir así: $P(x) = x^3 - 2^3$
Como el exponente es impar y el signo es un MENOS, debemos dividir por $(x - 2)$
Aplicamos Ruffini para dividir, pero primeramente completamos el polinomio:
$P(x) = 1x^3 + 0x^2 + 0x - 8$

	1	*0*	*0*	*-8*
2		*2*	*4*	*8*
	1	*2*	*4*	*0*

Como vemos, el resto $R(x) = 0$. Si aplicamos bien el método **siempre el resto debe ser cero.**

Para finalizar, debemos expresar al polinomio factorizado como el producto del polinomio obtenido, por su cociente:

$P(x) = (x - 2).(x^2 + 2x + 4)$

<u>Observación:</u> **un polinomio del tipo $P(x) = x^7 - 1$, aunque no parezca 6º caso, lo es, ya que $1^7 = 1 \Rightarrow P(x) = x^7 - 1^7$**

2.4 FUNCIONES POLINÓMICAS

Una función es polinómica si su regla de definición es un polinomio, es decir si puede expresarse de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde *n* es un número natural y los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales.

Como en un polinomio los números reales, expresados mediante cifras o letras, están relacionados a través de las operaciones: suma, resta, producto y potencia, el dominio natural de las funciones polinómicas (el conjunto para el cual están definidas) es el conjunto $\Re$.

2.4.1 Representación Gráfica de un Polinomio tipo: $a_1x + a_0$

Teorema
La gráfica de un polinomio de grado menor o igual a uno, es una recta.

Dado que dos puntos determinan una línea, podemos representar gráficamente al polinomio de grado uno encontrando dos puntos que pertenezcan a su gráfica. Después, trazamos una línea que pase por dichos puntos.

Para mayor seguridad, siempre se debe utilizar un tercer punto como control. A menudo, los puntos más fáciles de encontrar son aquellos en los que la gráfica corta los ejes.

Definición
La **ordenada al origen** (intersección eje *y*) de una gráfica es la ordenada del punto en el que la gráfica corta al eje *y*. La **abscisa al origen** (intersección eje *x*) es la abscisa del punto en el que la gráfica corta al eje *x.*

Para encontrar la ordenada al origen, se hace *x* = 0 y se resuelve para *y*. Para encontrar la abscisa al origen, se hace *y* = 0 y se resuelve para *x*.

Ejemplo 1: Representar gráficamente 4 *x* + 5 *y* = 20

Solución. Primero se hallan las intersecciones.

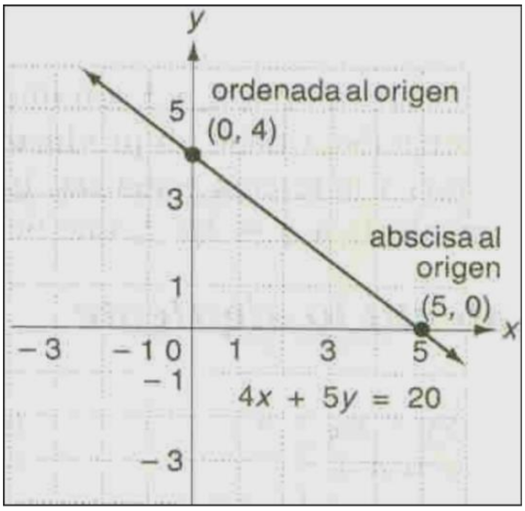
x = 0 *y* = 4 (ordenada al origen)

representa el punto (0, 4)

y = 0 *x* = 5 (abscisa al origen)

representa el punto (5, 0).

Podemos usar por ejemplo el punto (1, 16/15) como punto de control.



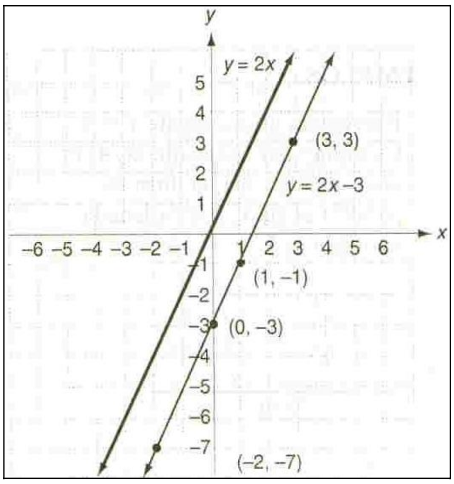
Intentar lo siguiente
Representar gráficamente: a) $2x - 6\,y = -2$ b) $3y = 2x - 6$

2.4.1.1 Rectas Paralelas

La gráfica de $y = m\,x$ es una línea recta que pasa por el origen. ¿Qué sucede si sumamos un número b al miembro derecho de la ecuación para obtener $y = m\,x + b$.

Ejemplo 3: Representar gráficamente $y = 2x - 3$ y comparar con la gráfica de $y = 2x$.

Primero construimos la tabla de valores, luego representamos gráficamente y comparamos.



x	y (ó $2x - 3$)
0	-3
1	-1
3	3
-2	-7

La gráfica de $y = 2x - 3$ es una línea recta desplazada 3 unidades hacia abajo a partir de la gráfica de $y = 2x$.

Teorema
La gráfica de una ecuación de la forma $y = mx$ es una línea recta que pasa por el origen.
La gráfica de $y = mx + b$ es una línea paralela a $y = mx$ que tiene como ordenada al origen al número b.

Intentar lo siguiente
Representar gráficamente y comparar con la gráfica de $y = 2x$.

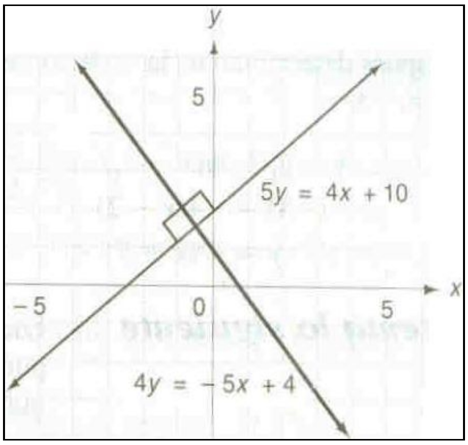
a) $y = 2x + 1$ b) $y = 2x - 4$

2.4.1.2 Rectas Perpendiculares

Si dos rectas se intersecan en ángulos rectos, son perpendiculares.

Teorema
Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es −1.

Ejemplo 1: Determinar si las gráficas de $5y = 4x + 10$ y $4y = -5x + 4$ son perpendiculares.



Solución. Primero encontramos la forma pendiente – ordenada al origen resolviendo para y.

$$y = \frac{4}{5}x + 2 \quad y \quad y = -\frac{5}{4}x + 1$$

El producto de las pendientes es - 1; es decir,

$$\cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -1.$$

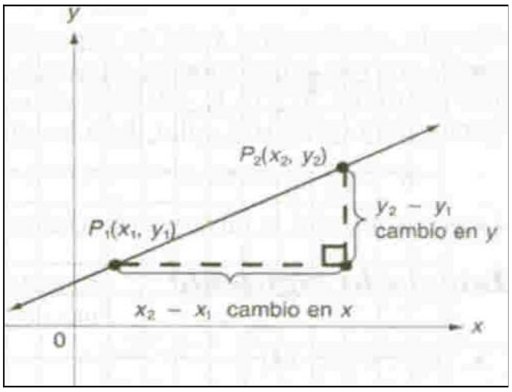
Las rectas son perpendiculares.

Intentar lo siguiente

Determinar si las gráficas de los siguientes pares de ecuaciones son perpendiculares:

a) $2y - x = 2$ y $y + 2x = 4$ b) $3y = 2x + 15$ y $2y = 3x + 10$

2.4.1.3 Determinación de la Pendiente de una Recta



Si observamos el grafico vemos una recta sobre la que hemos marcado dos puntos. A medida que vamos de P_1 a P_2, el cambio en x es $x_2 - x_1$. Análogamente, el cambio en y es $y_2 - y_1$.

La razón de cambio en y dividido por el cambio en x se llama **pendiente** de la recta.

Es común utilizar la letra m para designar pendientes.

Definición

La Pendiente m de una recta es el cambio en "y" dividido el cambio en "x" o, donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos cualesquiera de la recta y $x_2 - x_1$

m de una recta es el cambio en y dividido por el cambio en x, o

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta, y $x_2 - x_1$.

Para hallar la pendiente de una recta, se utiliza las coordenadas de dos puntos cualesquiera para determinar el cambio en y y el cambio en x. Después se divide el cambio en y por el cambio en x.

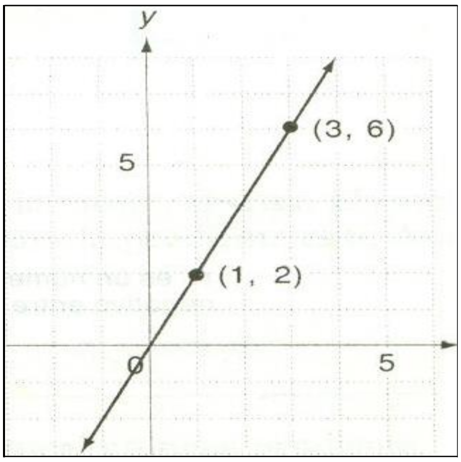
Ejemplo 1: Los puntos (1, 2) y (3, 6) están en una recta. Encontrar su pendiente.

Solución.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}$$

$$= \frac{6-2}{3-1} =$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$



Si utilizamos los puntos (1, 2) y (3, 6) en sentido inverso, encontramos que el cambio en *y* es negativo y el cambio en *x* es negativo. Obtenemos el mismo número para la pendiente.

$$m = \frac{2-6}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Cuando calculamos el valor de la pendiente, el orden de los puntos no importa en la medida en que calculemos las diferencias en el mismo orden.

Los puntos (0, 0) y (-1, -2) también se encuentran sobre la recta. Si utilizamos estos puntos para calcular el valor de la pendiente, obtenemos lo siguiente:

$$m = \frac{-2-0}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

La pendiente será la misma, independiente del par de puntos que utilicemos. Vemos que esta recta asciende de izquierda a derecha y tiene pendiente positiva. Si una recta desciende de izquierda a derecha tendrá pendiente negativa.

Intentar lo siguiente

Calcular la pendiente de la recta que contiene a cada par de puntos.

a) (1, 1) y (12, 14) b) (3, 9) y (4, 10) c) (0, -4) y (5, 7) d) (7, 2) y (6, 3)

2.4.1.4 Ecuación Punto – Pendiente de una Recta

Si conocemos la pendiente de una recta y las coordenadas de un punto sobre la recta podemos encontrar una ecuación para la misma.

Teorema

La ecuación punto – pendiente

Una recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m tiene por ecuación $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$.

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (1/2, −1) con pendiente 5.

Solución. $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$

$y - (-1) = 5\,(x - 1/2)$ Sustituyendo

$y + 1 = 5\,(x - 1/2)$

$y = 5x - 7/2$ Simplificando

Ejemplo 2: Encontrar la ecuación de la recta que tiene ordenada al origen de 4 y pendiente 3.

Solución. $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$

$y - 4 = 3\,(x - 0)$ Sustituyendo

$y = 3\,x + 4$ Simplificando

Intentar lo siguiente

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2, 4) con pendiente -3.
b) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4, -10) con pendiente 1/4.
c) Encontrar la ecuación de la recta cuya abscisa al origen es 5 y pendiente $-1/2$.

2.4.1.5 Ecuación de la Recta que Pasa por Dos Puntos

Dados dos puntos, podemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por ellos. Si encontramos la pendiente de la recta dividiendo el cambio en *y* por el cambio en *x*, y sustituimos este valor por *m* en la ecuación punto – pendiente, obtenemos la **ecuación de los dos puntos**.

> **Teorema**
> **Ecuación de los dos puntos**
> La ecuación de cualquier recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se calcula con la fórmula
> $$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 3) y (1, -4).

Solución. Primero encontramos la pendiente y después sustituimos en la fórmula los dos puntos. Tomamos (2, 3) como (x_1, y_1) y (1, -4) como (x_2, y_2).

$$y - 3 = \frac{-4 - 3}{1 - 2}\,(x - 2) \qquad \text{Sustituyendo}$$

$$y - 3 = \frac{-7}{-1}\,(x - 2)$$

$$y - 3 = 7\,(x - 2)$$

$$y - 3 = 7\,x - 14$$

$$y = 7\,x - 11$$

Podríamos haber tomado (1, -4) como (x_1, y_1) y (2, 3) como (x_2, y_2) y haber obtenido la misma ecuación.

$$y - (-4) = \frac{3 - (-4)}{2 - 1}\,(x - 1) \qquad \text{simplificando} \qquad y = 7x - 11$$

Intentar lo siguiente

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos señalados:

a) $(1, 4)$ y $(3, -2)$ b) $(3, -6)$ y $(0, 4)$

2.4.2 Representación Gráfica de un Polinomio tipo: ***a x*²** + ***b x*** + ***c***

Definición
Todo polinomio de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama **forma estándar** de la ecuación cuadrática.

2.4.2.1 Solución de Ecuaciones Utilizando la Fórmula Cuadrática

A continuación, mostramos una fórmula que proporciona las soluciones de cualquier ecuación cuadrática.

Teorema
La fórmula cuadrática
Las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado, a x^2 + b x + c = 0, están dadas por la **fórmula cuadrática**.

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1: Resolver 3 x^2 + 5 x = -1.

Solución: Primero hay que encontrar la forma estándar y determinar a, b y c.

3 x^2 + 5 x + 1 = 0 → a = 3, b = 5, c = 1

Después, hay que utilizar la fórmula cuadrática.

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \rightarrow \quad X=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.3.1}}{2.3}$$

$$X=\frac{-5\pm\sqrt{25-12}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$$

Las soluciones son: $x=\frac{-5+\sqrt{13}}{6}$ y $x=\frac{-5-\sqrt{13}}{6}$

Cuando se utiliza la fórmula cuadrática, las soluciones que se obtienen son soluciones de la ecuación original a menos que se haya cometido un error de cálculo.

Intentar lo siguiente
Resolver utilizando la fórmula cuadrática: a) 3 x^2 + 2 x = 7 b) 5 x^2 + 3 x = 9

2.4.2.2 Discriminante

La expresión $b^2 – 4ac$ de la fórmula cuadrática se llama **discriminante**. Con este número podemos determinar la naturaleza de las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática.

Teorema

Una ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, con $a \neq 0$ y coeficientes reales, tiene

a) Exactamente una raíz real si $b^2 + 4ac = 0$.

b) Dos raíces reales si $b^2 + 4ac > 0$.

c) Dos raíces complejas, mas no reales, que son conjugadas entre sí cuando $b^2 + 4ac < 0$.

Ejemplo 1: Determinar la naturaleza de las raíces de $9\,x^2 - 12\,x + 4 = 0$

Solución. $a = 9$, $b = -12$ y $c = 4$

Calculamos el discriminante

$$b^2 – 4ac = (-12)^2 – 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 – 144 = 0$$

Solo hay una raíz y ésta es un número real.

Ejemplo 2: Determinar la naturaleza de las raíces de $x^2 + 5\,x + 8 = 0$

Solución. $a = 1$, $b = 5$ y $c = 8$

Calculamos el discriminante

$$b^2 – 4ac = (5)^2 – 4 \cdot 1 \cdot 8 = 25 – 32 = - 7$$

En vista que el discriminante es negativo, la ecuación no tiene raíces reales. Sus raíces son complejas y conjugadas entre sí.

Ejemplo 3: Determinar la naturaleza de las raíces de $x^2 + 5\,x + 6 = 0$

Solución. $a = 1$, $b = 5$ y $c = 6$

Calculamos el discriminante

$$b^2 – 4ac = (5)^2 – 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 – 24 = 1$$

Como el discriminante es positivo, hay dos raíces reales distintas entre sí.

Intentar lo siguiente

Determinar la naturaleza de las raíces de cada ecuación

a) $x^2 + 5\,x - 3 = 0$ b) $9\,x^2 - 6\,x + 1 = 0$ c) $3\,x^2 - 2\,x + 1 = 0$

2.4.2.3 Vértice de la función cuadrática.

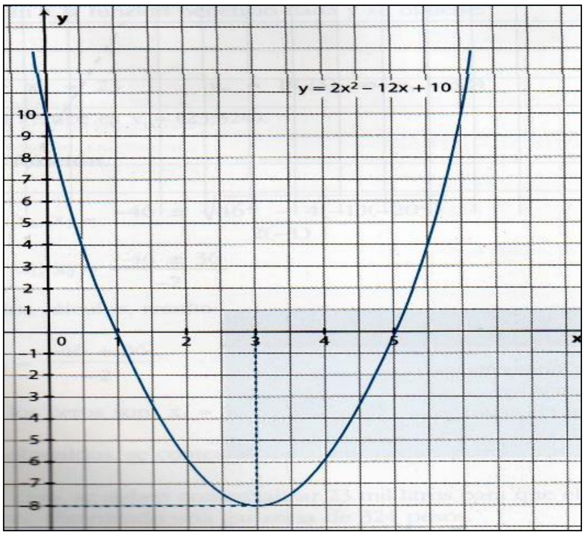
Con las expresiones $x_v = -\frac{b}{2a}$ y $y_v = f(x_v)$ podemos determinar el vértice de la ecuación cuadrática.

Ejemplo: $y = 2x^2 - 12x + 10$

Vértice: $x_v = \dfrac{-(-12)}{2 \times 2} = 3$ $y_v = f(3) = -8$

Ceros de la función: $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$ estos valores se hallan utilizando la fórmula cuadrática.

La ordenada al origen: 10.



2.5. PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

2.5.1. Proporcionalidad directa.

Dos magnitudes a y b son directamente proporcionales cuando existe una constante k tal que:

$$\frac{a}{b} = k$$

La constante k, se denomina constante de proporcionalidad o razón.

Se dice que a y b mantienen una relación de proporcionalidad directa.

En este tipo de proporcionalidad, cuando una de las magnitudes aumenta, la otra también; y lo mismo ocurre cuando alguna de las dos disminuye.

Ejemplo:

En un movimiento con velocidad constante "v", la distancia recorrida "d" en función del tiempo "t" viene dada por la ecuación $d = v.t$

La distancia es directamente proporcional al tiempo puesto que

$$\frac{d}{t} = v$$

En este ejemplo, la velocidad es la constante de proporcionalidad.

Cuando el tiempo aumenta, la distancia también lo hace y viceversa.

2.5.1.1. Regla de tres (directa)

Si dos magnitudes a y b mantienen una relación de proporcionalidad directa, una regla de tres simple directa (o simplemente regla de tres directa) nos permite conocer el valor de una de las dos magnitudes cuando la otra varía.

Para aplicar una regla de tres, escribimos la siguiente tabla:

+	Valor	Valor
Magnitud a	a1	a2
Magnitud b	b1	b2

Como la relación de proporcionalidad directa debe ser constante, ha de cumplirse que

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

De esta relación podemos despejar el valor que deseamos calcular.

2.5.2. Proporcionalidad inversa.

Dos magnitudes a y b son inversamente proporcionales cuando existe una constante k tal que:

$$a.b = k$$

La constante k se denomina **constante de proporcionalidad**.

En esta proporcionalidad, cuando una de las magnitudes aumenta, la otra disminuye y viceversa.

Ejemplo:

Si un trabajador pinta una valla en 10 horas, entonces para pintar la misma valla entre dos trabajadores se necesitan 5 horas.

Se trata de una proporcionalidad inversa puesto que cuando aumenta el número de trabajadores, el número de horas necesarias disminuye. La constante de proporcionalidad es 10 porque

$$1 \cdot 10 = 10 = 2 \cdot 5$$

Es decir, si a es el número de trabajadores y b el número de horas, entonces

$$a \cdot b = 10$$

2.5.2.1. Regla de tres (inversa)

Cuando dos magnitudes a y b mantienen una relación de proporcionalidad inversa, una **regla de tres simple inversa** (o simplemente **regla de tres inversa**) nos permite conocer el valor de una de las dos magnitudes cuando la otra varía.

Para aplicar una regla de tres, escribimos la siguiente tabla:

-	Valor	Valor
Magnitud a	a_1	a_2
Magnitud b	b_1	b_2

Como la relación de proporcionalidad indirecta debe ser constante, se cumple que

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$$

De esta relación podemos despejar el valor que deseamos calcular.

Nota: en ocasiones se utilizan los signos (+) y (-) en las tablas escritas anteriormente para denotar que se trata de una proporcionalidad directa e indirecta, respectivamente.

UNIDAD 3: ECUACIONES DE PRIMER GRADO

3.1.1 Ecuaciones de Primer Grado con una incógnita

Se dice que una ecuación es **entera** cuando las incógnitas están sometidas únicamente a las operaciones de suma, resta y multiplicación.

> ***Definición***
> *Una ecuación entera con una incógnita se dice de primer grado o lineal, cuando el mayor grado con que figura la incógnita es el primero.*

Una proposición como $3(x+3) = x+5$ es un ejemplo de una **ecuación de primer grado o ecuación lineal**, porque la variable x sólo aparece elevada a la primera potencia. También se dice que es una **ecuación condicional**; es cierta para ciertas sustituciones de la variable x, pero no para otras. Por ejemplo, es verdadera cuando $x = -2$, pero es falsa para $x = 1$. Por otro lado, una ecuación como $3(x+3) = 3x+9$ se llama **identidad** porque es verdadera o válida para todos los números reales x.

Resolver una ecuación quiere decir determinar los números reales x para los cuales la ecuación dada es verdadera. A lo que se determina se le llama **soluciones o raíces** de la ecuación dada.

Resolvamos la ecuación $3(x+3) = x+5$. La estrategia es reunir todos los términos donde aparezca la variable, de un lado de la ecuación, y las constantes del otro.

El primer paso es eliminar el paréntesis aplicando la propiedad distributiva

$$3(x+3) = x+5$$

$$3x+9 = x+5$$

$$3x+9+(-9) = x+5+(-9)$$ *Sumando -9 a cada lado de la ecuación*

$$3x = x-4$$

$$3x+(-x) = x-4+(-x)$$ *Sumando $-x$ a cada lado de la ecuación*

$$2x = -4$$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(-4)$$ *Multiplicando a cada lado por $\frac{1}{2}$*

$$x = -2$$

Demostraremos que $x = -2$ es la solución reemplazándola en la ecuación original.

$$3[(-2)+3] = (-2)+5 \qquad \rightarrow \qquad 3 = 3$$

> *No se debe decir que -2 es una solución hasta que se haya comprobado.*

En la solución anterior hemos empleado las dos ***propiedades básicas de la igualdad***.

Propiedad de igualdad en la suma
Para todos los números reales $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$, *si* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ *entonces* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

Propiedad de igualdad en la multiplicación
Para todos los números reales $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ***y*** $\boldsymbol{c}$, *si* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ *entonces* $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc}$

La importancia de estas dos propiedades reside en que producen **ecuaciones equivalentes**, ecuaciones que tienen las mismas raíces. Así, la propiedad de la suma convierte a la ecuación $2x - 3 = 7$ en la forma equivalente $2x = 10$.

Regla
Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, se suprimen los paréntesis en caso que los haya. Se trasponen los términos de modo que todos los que contienen a la incógnita queden en el primer miembro y los independientes en el segundo; se reducen los términos en cada miembro, y, en caso que la incógnita quede afectada por un coeficiente, se pasa éste al segundo miembro. Efectuando las operaciones, queda determinada la solución. Si al despejar la incógnita resulta precedida por el signo menos, se multiplican ambos miembros de la ecuación por -1.

Intentar lo siguiente

Resolver las siguientes ecuaciones enteras de primer grado

a) $x + 3 = 9$
b) $2x + 5 = x + 11$
c) $3(x - 1) = 2x + 7$
d) $2(x + 2) = x - 5$
e) $5x - 3 = 3x + 1$
f) $4(x + 2) = 3(x - 1)$

3.1.2 Ecuaciones Racionales de Primer Grado

Se dice que una ecuación es **racional** cuando por lo menos una de las incógnitas figura en el denominador.

Ejemplo 1: Resolver $\dfrac{3}{1-x} = 4$

Solución.	$3 = 4(1 - x)$	Multiplicando ambos miembros por $(1 - x)$
	$3 = 4 - 4x$	Utilizando la propiedad distributiva
	$4x - 4 = -3$	Multiplicando ambos miembros por -1 y ordenándolos
	$4x = 4 - 3$	Sumando 4 a cada lado de la ecuación
	$x = \frac{1}{4}$	Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{4}$

Luego $\frac{1}{4}$ es la raíz de la ecuación dada. En efecto al sustituir ese valor en la ecuación dada esta se satisface.

Ejemplo 2: Resolver $\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{x+1}{x}$

Recordando que $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$ (diferencia de cuadrados), se procede a restar las dos fracciones buscando el común denominador.

$\frac{x(x+3)-2(x-3)}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$ Sumando fracciones con distinto denominador y aplicando la propiedad distributiva.

$$\frac{x^2+3x-2x+6}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$$

$\frac{x^2+x+6}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$ Multiplicando ambos miembros por x y por $x^2 - 9$

$x\,(x^2 + x + 6) = (x^2 - 9)\,(1 + x)$ Aplicando propiedad distributiva

$x^3 + x^2 + 6x = x^2 + x^3 - 9 - 9x$ Reduciendo términos semejantes

$6x + 9x = -9$ Sumando 9*x* a ambos miembros de la ecuación

$15x = -9$ Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{15}$

$$x = -\frac{3}{5}$$

La ecuación $\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{1+x}{x}$ tiene por conjunto solución $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$

Regla

Para resolver una ecuación racional con una incógnita se reducen las fracciones de cada miembro al mínimo común denominador; mediante simplificaciones y pasaje de denominadores se transforma en una ecuación entera. Resuelta ésta, es necesario probar si las raíces halladas satisfacen a la ecuación racional propuesta.

Cuando se resuelven ecuaciones racionales puede suceder que la supresión de los denominadores que contienen a la incógnita haga aparecer raíces extrañas, es decir, números que satisfacen a la ecuación transformada, pero que no satisfacen a la ecuación dada. Por consiguiente, cuando se resuelve una ecuación racional, es necesario verificar siempre la raíz hallada.

Intentar lo siguiente

Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

$a)\ \dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{4}{5}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=2$ $\qquad$ $c)\ \dfrac{4x}{x^2-4}=\dfrac{2x}{x+2}-2$

Exploremos ahora la solución de problemas. Lo que haremos es traducir el enunciado de un problema al lenguaje matemático adecuado, y desarrollar una ecuación que podamos resolver.

3.1.3 Aplicación a la Resolución de Problemas

Reglas para Resolver Problemas

1. *Lea el problema. Haga una lista de la información disponible.*

2. *¿Qué es lo que se debe determinar? Introduzca una variable y defina lo que representa. En caso de ser posible trace una figura o use una tabla si es necesario.*

3. *Formule una ecuación.*

4. *Resuelva la ecuación.*

5. *¿Parece razonable la respuesta? ¿Ha contestado usted la pregunta que aparece en el problema?*

6. *Compruebe su respuesta con la ecuación en el problema original.*

7. *Describa la solución del problema.*

Problema 1: La longitud de un rectángulo es 1 cm. menos que el doble de su ancho. El perímetro es 28 cm. Determine las dimensiones del rectángulo.

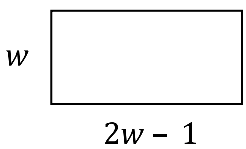
Solución

1. *Vuelva a leer el problema y trate de imaginar la situación que se describe. Tome nota de toda la información que se da en el problema.*

   La longitud es uno menos que el doble del ancho.
   El perímetro es 28.

2. *Determine qué es lo que se pide contestar. Introduzca una variable adecuada, que normalmente representa la cantidad que se debe determinar. Cuando sea apropiado, haga una figura.*

   Representando el ancho con w.
   Entonces, $2w-1$ representa la longitud.



3. *Con la información disponible, forme una ecuación donde intervenga la variable.*

   El perímetro es la distancia que se recorre alrededor del rectángulo. Esto proporciona la información necesaria para escribir la ecuación.

$$w + (2w - 1) + w + (2w - 1) = 28$$

4. *Resuelva la ecuación.*

$$w + (2w - 1) + w + (2w - 1) = 28$$
$$w + 2w - 1 + w + 2w - 1 = 28$$
$$6w - 2 = 28$$
$$6w = 30$$
$$w = 5$$

5. *Regrese al problema original para ver si la respuesta obtenida tiene sentido. ¿Parece ser una solución razonable? ¿Quedo contestado lo que pregunta el problema?*

El problema original preguntaba las dos dimensiones. Si el ancho, w es $5\ cm.$, entonces la longitud, $2w - 1$, debe ser $9\ cm.$

6. *Compruebe la solución por sustitución directa de la respuesta en el enunciado original del problema.*

Como comprobación, vemos que la longitud del rectángulo, $9\ cm.$, es $1\ cm.$ menos que el doble del ancho, $5\ cm.$, tal como lo dice el problema. También, el perímetro es $28\ cm.$

7. *Por último, describa la solución en términos de las unidades correctas.*

Las dimensiones son: $5\ cm.$ por $9\ cm.$

Problema 2: Un automóvil sale de cierta población a mediodía, y se dirige hacia el este a $40\ kilómetros\ por\ hora$. A las $13\ horas$ otro automóvil sale de la población, viaja en la misma dirección a una velocidad de $50\ kilómetros\ por\ hora$. ¿Cuántas horas tarda el segundo vehículo en rebasar al primero?

Solución: Con frecuencia, los problemas de movimiento de este tipo parecen difíciles, cosa que no debería ser. La relación básica que debemos recordar es que **la velocidad multiplicada por el tiempo es igual a la distancia** ($r \times t = d$). Por ejemplo, un automóvil viajando a una velocidad de 60 $kilómetros\ por\ hora$, durante 5 $horas$, recorre $60 \times 5 = 300\ kilómetros$.

Necesitamos volver a leer el problema y ver qué parte de la información que ahí aparece puede ayudar a formar una ecuación. Los dos automóviles viajan a distintas velocidades y durante distintos tiempos, pero ambos viajarán la misma distancia desde el punto de partida hasta que se encuentran. La pista es la siguiente: *Representar la distancia que viaja cada uno e igualar estas cantidades*.

Usaremos la *x* para representar la cantidad de horas que tardará el segundo automóvil en rebasar al primero. Entonces éste, que ha comenzado una hora antes, viaja $x + 1$ horas hasta el punto de encuentro. Es útil resumir esta información en forma de tabla.

	Velocidad	**Tiempo**	**Distancia**
Primer automóvil	40	$x + 1$	$40(x + 1)$
Segundo automóvil	50	x	$50x$

Al igualar las distancias llegamos a una ecuación de la que se puede despejar x:

$$50x = 40\,(x + 1) \rightarrow 50x = 40x + 40 \rightarrow 10x = 40 \rightarrow x = 4$$

El segundo automóvil rebalsa al primero en $4\ horas$. Esta respuesta, ¿parece razonable? Comprobamos el resultado. El primer automóvil viaja $5\ horas$ a $40\ kilómetros\ por\ hora$, lo que hace un total de 200 kilómetros. El segundo, viaja $4\ horas$ a $50\ kilómetros\ por\ hora$, y se obtiene el mismo total de $200\ kilómetros$.

Respuesta: El segundo vehículo tarda $4\ horas$ en rebasar al primero.

3.1.4 Ecuaciones de Primer Grado con Dos Incógnitas

Las ecuaciones que tienen más de una incógnita se satisfacen para diferentes sistemas de valores atribuidos a sus letras. Así la ecuación $2x + y = 7$ se satisface para infinitos pares de valores atribuidos a x y a y, por ejemplo, para:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$ etcétera.

Estas soluciones se pueden escribir como pares ordenados, así:

$(1, 5)$; $(2, 3)$; $(4, -1)$; etc.

Cada uno de los pares de valores que satisface a una ecuación con dos incógnitas constituye una *solución* de esa ecuación.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación de primer grado con dos incógnitas.

$$3x - y = 2y + 15$$

$3x - y - 2y = 15$ Sumando $-2y$ a cada lado de la ecuación

$3x - 3y = 15$ Reduciendo

$3\,(x - y) = 15$ Sacando factor común

$x - y = \frac{15}{3}$ Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{3}$

$x - y = 5$

Luego x e y serán los infinitos pares de números que cumplen la condición de que su diferencia sea 5. Entre ellos:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases};\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases};\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases};\ \begin{cases} x = 19/3 \\ y = 4/3 \end{cases}$$ etc.

Como pares ordenados: $(8, 3)$; $(3, -2)$; $(-4, -9)$; $(19/3, 4/3)$; etc.

Cada uno de estos pares de valores es por lo tanto una ecuación, como puede comprobarse al reemplazar en ella x e y, respectivamente, por las componentes de cada uno de esos pares.

> *Toda ecuación de primer grado con dos o más incógnitas admite infinitas soluciones*.

Esta conclusión se expresa también diciendo que la ecuación es *indeterminada*.

Si escribimos en forma genérica una ecuación de primer grado con dos incógnitas, obtenemos

$$a\,x + b\,y = c$$

donde a, b, y c son números que se llaman, respectivamente: coeficiente de x; coeficiente de y, y término independiente. Si se despeja la y se obtiene una función lineal.
En nuestro ejemplo; $3x - y = 2y + 15$, si despejamos la variable y, se obtiene:

$y = x - 5$ representa la ecuación explícita de una recta.

3.2 SISTEMA DE ECUACIONES

3.2.1 Sistema De Dos Ecuaciones Con Dos Incógnitas

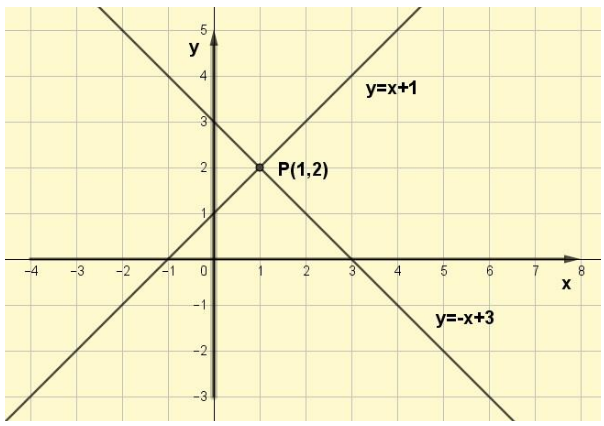
Un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen las mismas variables se llama **sistema de ecuaciones**. El conjunto solución de un sistema se compone de todos los pares ordenados que hacen ciertas a todas las ecuaciones del sistema.

Sabemos que dos rectas no paralelas cualesquiera en un plano se cortan exactamente en un punto. Para determinar las coordenadas de dicho punto se plantean las ecuaciones de ambas rectas. A continuación, por ejemplo, tenemos un **sistema** de dos ecuaciones lineales con dos variables, y sus gráficas trazadas en el mismo sistema de coordenadas.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

La gráfica muestra el conjunto solución del sistema. Su intersección es el par ordenado (1, 2).
Esto se comprueba mediante una sustitución.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\underline{x - y = -1}} \\ 1 - 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{x + y = 3} \\ 1 + 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$



Puesto que ambas ecuaciones son ciertas, $(1,2)$ es la solución.

*Si un sistema sólo tiene una solución, se dice que es la **única** solución.*

Intentar lo siguiente

Resolver gráficamente: **a**) $\begin{cases} x+y=11 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ **b**) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ -x+2y=-5 \end{cases}$

3.2.2 Solución de Sistemas de Ecuaciones

Es posible que la representación gráfica no sea un método eficaz y preciso para resolver un sistema de ecuaciones de dos variables. Ahora consideraremos otros métodos más eficientes.

3.2.2.1 Método de Sustitución

El **método de sustitución** es una técnica muy útil para resolver sistemas en los que una variable tiene coeficiente igual a 1.

***Pasos**:*

1. *Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema.*
2. *Se sustituye en la otra ecuación dicha incógnita por la expresión obtenida. De ahí el nombre de método de sustitución.*
3. *Se resuelve la ecuación con una incógnita, que así resulta.*
4. *Esta incógnita se reemplaza por el valor obtenido, en la expresión que resultó de despejar la primera y se calcula así el valor de está.*

Ejemplo 1: Utilizando el método de sustitución, resolver el siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ 3x+4y=4 \end{cases}$$

Solución. Comenzamos diciendo que (x,y) son las coordenadas del punto de intersección de este sistema. Esta abscisa y esta ordenada satisfacen ambas ecuaciones.

Por consiguiente, de cualquiera de las ecuaciones se puede despejar x o y, luego sustituir lo obtenido en la otra.

PRIMER PASO: Despejemos y de la primera ecuación, pues el coeficiente del término correspondiente es 1 (es la más fácil).

$$y = 6 - 2x$$

SEGUNDO PASO: Así y y $6 - 2x$ son equivalentes. Podemos reemplaza $6 - 2x$ en vez de y en la segunda ecuación.

$$3x + 4y = 4$$

$$3x + 4(6 - 2x) = 4 \qquad \text{Sustituyendo } 6 - 2x \text{ en vez de } y.$$

TERCER PASO: Esto da una ecuación de una variable. Ahora podemos resolver para x.

$$3x + 24 - 8x = 4 \qquad \text{Utilizando la propiedad distributiva}$$

$$-5x = -20$$

$$x = 4$$

CUARTO PASO: Se sustituye 4 en vez de x en cualquiera de las ecuaciones y se resuelve para y.

$$2x + y = 6 \qquad \text{Escogiendo la primera ecuación}$$

$$2 \cdot 4 + y = 6$$

$$y = -2$$

El resultado es el par ordenado $(4, -2)$. Este par ordenado satisface ambas ecuaciones, de modo que es la solución del sistema.

Intentar lo siguiente

Utilizar el método de sustitución para resolver los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ 3y - 2x = 12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$

3.2.2.2 Método de Igualación

Pasos:

1. *Se despeja una de las incógnitas en las dos ecuaciones.*
2. *Se igualan las expresiones obtenidas. De ahí el nombre de método de igualación.*
3. *Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.*
4. *Se reemplaza el valor obtenido de esta última incógnita en cualquiera de las dos expresiones que resultaron al despejar la primera, y se obtiene así su valor.*

<u>Ejemplo 1</u>: Utilizando el método de igualación, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 10 & [1] \\ 2x + \dfrac{5}{4}y = 1 & [2] \end{cases}$$

PRIMER PASO: Al aplicar este método, también conviene observar cuál es la incógnita que se despeja más fácilmente en las dos ecuaciones; en este caso es x.

De [1] $\qquad x = 10 - 3y \qquad [3]$

De [2] $\qquad 2x = 1 - \frac{5}{4}y \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{1 - \frac{5}{4}y}{2} \qquad [4]$

SEGUNDO PASO: Se igualan los segundos miembros de [3] y [4]

$$10 - 3y = \frac{1 - \frac{5}{4}y}{2}$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en y que se acaba de obtener.

$$(10 - 3y)\,2 = 1 - \frac{5}{4}y \quad \rightarrow \quad 20 - 6y = 1 - \frac{5}{4}y$$

$$-6y + \frac{5}{4}y = 1 - 20 \quad \rightarrow \quad -\frac{19}{4}y = -19$$

$$-y = \frac{(-19)\cdot 4}{19} \quad \rightarrow \quad y = 4$$

CUARTO PASO: Se sustituye y por su valor, 4, en la expresión [3] o en la [4]. En este ejemplo es más cómodo en la [3].

$$x = 10 - 3 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

El resultado es el par ordenado $(-2, 4)$. Este par ordenado satisface ambas ecuaciones, de modo que es la solución del sistema.

Intentar lo siguiente

Utilizar el método de igualación para resolver los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ 3y - 2x = 12 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$

3.2.2.3 Método de Reducción por Suma o Resta

En este método se trata de obtener una ecuación con una sola variable, o *eliminar* una de las variables, por esto también se lo conoce como **método de eliminación**.

Pasos

1. *Se multiplican las ecuaciones por un número conveniente, para igualar el valor absoluto de los coeficientes de una misma incógnita, en las dos ecuaciones.*
2. *Según que dichos coeficientes resulten de igual o distinto signo, se restan o se suman las ecuaciones, con lo que se consigue eliminar dicha incógnita. De ahí el nombre de método de eliminación o reducción.*
3. *Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.*
4. *Se reemplaza está por su valor en una de las ecuaciones dadas y se obtiene el valor de la primera incógnita o bien se calcula esta incógnita por el mismo método.*

Ejemplo 1: Utilizando el método de reducción o eliminación, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - \frac{5}{3}y = 5 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

PRIMER PASO: Al aplicar el método conviene observar para cuál de las dos incógnitas se pueden igualar con más facilidad los valores absolutos de sus coeficientes.
En este caso es la x. Es inmediato que multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 se igualan los coeficientes de x.

$$\begin{cases} 6x - 5y = 15 \\ 6x - 8y = 6 \end{cases}$$

SEGUNDO PASO: Como los coeficientes de x son iguales en valor absoluto y signo, se restan miembro a miembro las ecuaciones para eliminar la x.

$$-5y - (-8y) = 15 - 6$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en y que se acaba de obtener.

$$-5y + 8y = 9 \quad \rightarrow \quad 3y = 9 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

CUARTO PASO: Se reemplaza el valor de $y = 3$, en una de las ecuaciones del sistema dado; en este caso es más cómodo en la segunda.

$$3x - 4 \cdot 3 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x - 12 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x = 15$$

$$x = 5$$

Luego, el conjunto solución es: $S = \{(5, 3)\}$

Ejemplo 2: Resolver el siguiente sistema por el método de eliminación

PRIMER PASO: Se observa en este ejemplo, que basta multiplicar la segunda ecuación por 3 para igualar el valor absoluto de los coeficientes de y; el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 32 \\ 9x - 6y = -60 \end{cases}$$

SEGUNDO PASO: Como los coeficientes de y tienen signos contrarios, se suman miembro estas ecuaciones para eliminar y.

$$5x + 9x = 32 - 60$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en x.

$$14x = -28 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

CUARTO PASO: Para calcular y se puede reemplazar este valor $x = -2$ en una ecuación del sistema o bien eliminar la x, multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 5.

$$\begin{cases} 15x + 18y = 96 \\ 15x - 10y = -100 \end{cases}$$

restando miembro a miembro

$$18y - (-10y) = 96 - (-100) \quad \rightarrow \quad 28y = 196 \quad \rightarrow \quad y = 7$$

Luego la solución del sistema es: $S = \{(-2, 7)\}$.

Intentar lo siguiente

Utilizar el método de eliminación para resolver los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + y = 5{,}75 \end{cases}$

3.2.2.4 Regla de Cramer

La regla de Cramer es un teorema del álgebra lineal que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Este tema será ampliado en el cursado de la carrera, pero hacemos aquí una introducción al mismo.

Sea el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Su representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

Si el sistema es compatible determinado, la solución viene dada por la regla de Cramer, resolviendo los determinantes:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb; \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - dc; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Se obtienen los valores de x e y, haciendo los cocientes de determinantes:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

<u>Ejemplo 1</u>: Resolver el siguiente sistema por el método de Cramer.

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$$

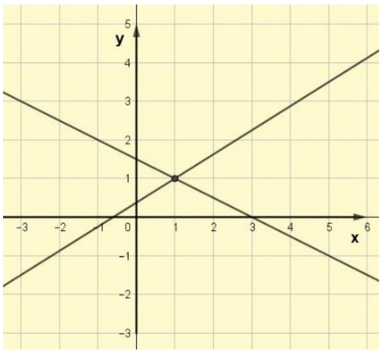
$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 - (-4) = 24 + 4 = 28 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = 8 + 3 = 11$$

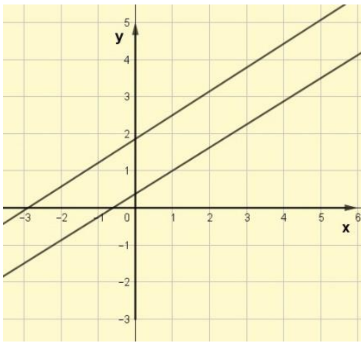
$$x = \frac{28}{11} = 2,\overline{54}\,; \qquad y = \frac{-10}{11} = -0,\overline{90}$$

3.2.3 Interpretación Geométrica de las Distintas Soluciones

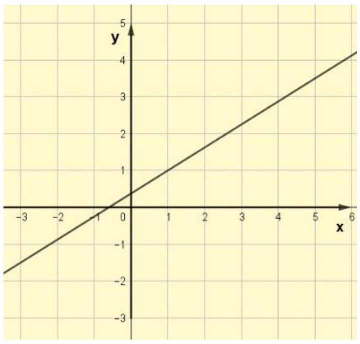
Las gráficas de dos ecuaciones lineales pueden ser dos rectas que se intersecan. También pueden ser dos rectas paralelas o una misma recta.



Dos rectas que se intersecan.
Solución única.



Rectas paralelas.
No hay solución.

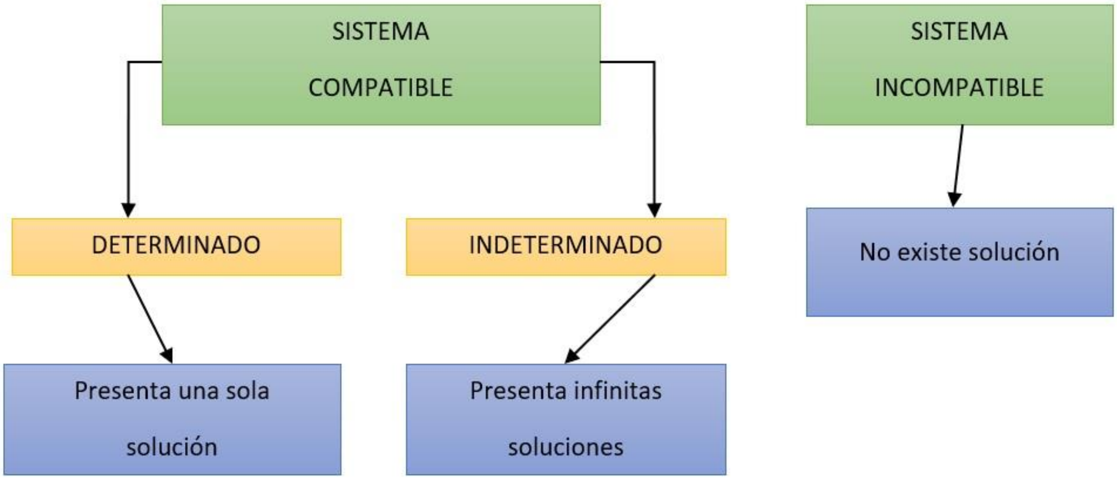


Una misma recta.
Infinitas soluciones.

3.2.4 *Sistemas Compatibles y Sistemas Incompatibles*

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, es encontrar él o los valores **que satisfacen simultáneamente** las ecuaciones. Es decir, al reemplazar los valores hallados, convierte cada ecuación en una afirmación verdadera. Si no se puede hallar esos valores, significa que no existe ningún valor que lo satisfaga, el sistema se dice que es **incompatible o inconsistente**. Si el sistema presenta solución se dice que es **compatible o consistente**.

Mediante un diagrama presentaremos las distintas situaciones que pueden existir:



*Si un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución, decimos que es **compatible o consistente**. Si un sistema no tiene solución, decimos que es **incompatible o inconsistente.***

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es compatible o incompatible.

$$\begin{cases} x - 3y = 1 & [1] \\ -2x + 6y = 5 & [2] \end{cases}$$

Intentamos encontrar una solución. Multiplicamos [1] por 2 y sumamos el resultado a [2] (método de eliminación)

$$\begin{cases} x - 3y = 1 & [1] \\ 0 = 7 & 2 * [1] + [2] \end{cases}$$

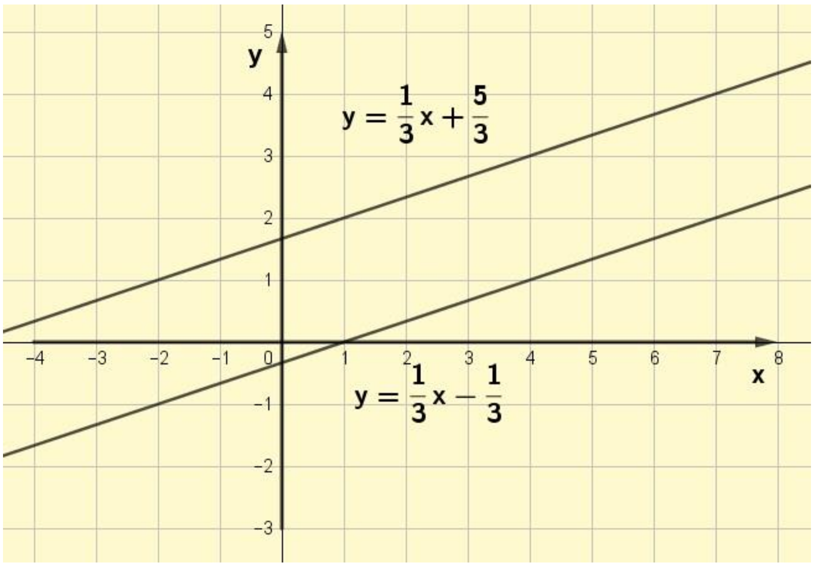
La última ecuación dice que $0 \cdot x + 0 \cdot y = 7$. No hay valores que puedan asumir las variables para los que esto sea cierto, de modo que no hay solución. El sistema es ***inconsistente***. Podemos considerar el problema gráficamente. Las formas ***pendiente – ordenada*** al origen de las ecuaciones originales son

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \qquad [1]$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \qquad [2]$$

Podemos ver que las rectas son paralelas. No tienen punto de intersección, de modo que el sistema es inconsistente

Si al resolver un sistema de ecuaciones llegamos a una ecuación que es a todas luces falsa, tal como $0 = 7$, entonces el sistema es inconsistente.



Intentar lo siguiente

Determinar si los siguientes sistemas son consistentes o inconsistentes.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

3.2.4.1 Sistemas Compatibles Indeterminados

Considerando el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 10x + 4y = 6 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2, obtenemos la segunda de ellas. Sus gráficas son la misma recta. Por lo tanto, el sistema tendrá una infinidad de soluciones. Decimos que el sistema es **indeterminado**.

Sistemas Compatibles Indeterminados o Dependientes

Si un sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones, decimos que el sistema es indeterminado o dependiente.

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & [1] \\ 4x + 6y = 2 & [2] \end{cases}$$

Si multiplicamos a [1] por –2 y sumamos el resultado a [2] obtenemos

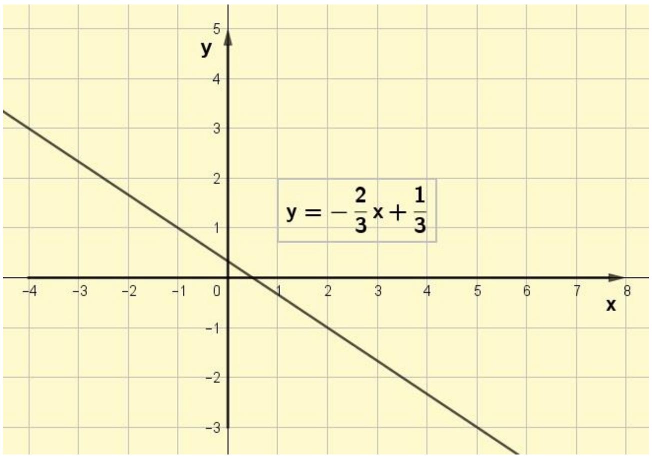
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & [1] \\ 0 = 0 & [2] - 2 * [1] \end{cases}$$

La última ecuación dice que $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. Esto es verdad para todos los valores que puedan asumir las variables. El sistema es indeterminado.

También podemos considerar el problema gráficamente. La forma ***pendiente – ordenada*** al origen de las ecuaciones son

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \qquad [1]$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \qquad [2]$$



Las ecuaciones en la forma ***pendiente – ordenada*** al origen de las rectas son iguales. Esto significa que las gráficas son la misma. Este sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones. Cada punto de la recta con ecuación

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

tiene coordenadas que constituyen una solución. El sistema es indeterminado.

El conjunto solución se puede expresar como:

$$S = \left\{\left(x, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)\right\}$$

Intentar lo siguiente

Determinar si los siguientes sistemas son indeterminados.

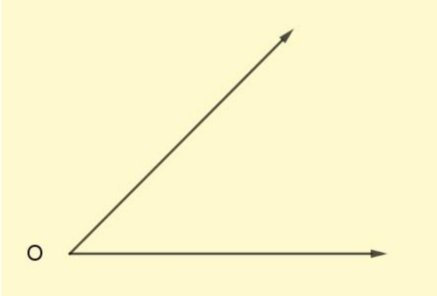
$a)\ \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = -2 \end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Tema 4: TRIGONOMETRÍA Y ESTUDIO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

La Trigonometría es una parte de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Estas son de mucha utilidad para resolver problemas en diversas ramas de esta ciencia o de otras, como la física, la química, la astronomía, etc. La trigonometría (etimológicamente "medición de triángulos") fue inventada por los astrónomos griegos para calcular los elementos de un triángulo (sus ángulos y lados).
Primeramente, es necesario realizar una revisión del concepto de ángulo $L_2\ O\ L_1$. Así pueden darse dos posibilidades: cuando se gira en sentido contrario al de las agujas del reloj (antihorario) se considera "ángulo positivo" y cuando se gira a favor de las agujas del reloj (horario) se considera "ángulo negativo".

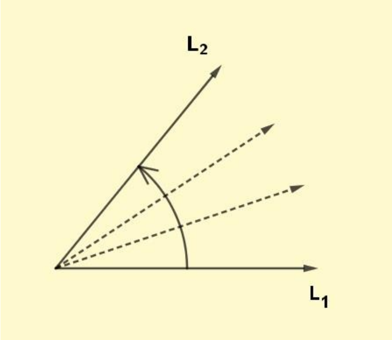
Definición 1

Ángulo es una parte del plano limitada por dos semirrectas (lados del ángulo), que tienen un origen en común, denominado vértice (O).



Definición 2

Dadas dos semirrectas L_1 y L_2, con origen común, ángulo es la porción del plano generada por el "barrido" (giro) de la semirrecta L_1 hasta coincidir con la semirrecta L_2.



Para la medición de ángulos se tiene en cuenta diversos "sistemas". La medida, o medición de un ángulo consiste en asociar a todo ángulo del plano un número que caracteriza su abertura.

4.1. Sistema natural o circular

El radián (en algunas calculadoras se abrevia "Rad") es la forma de medir un ángulo en el sistema natural de medición. Para determinarlo experimentalmente (y en forma aproximada) realice lo siguiente:

1) Determine el diámetro de un disco con un hilo (por ejemplo, un CD o algo similar).
2) Divida por la mitad dicho hilo para obtener el radio.
3) Ubique dicho radio sobre el disco con el cual se generó y marque la longitud del arco sobre la periferia.

4) Trace dos radios por cada extremo del arco y mida el ángulo formado. Si obtiene 57,29° el experimento resultó un éxito.

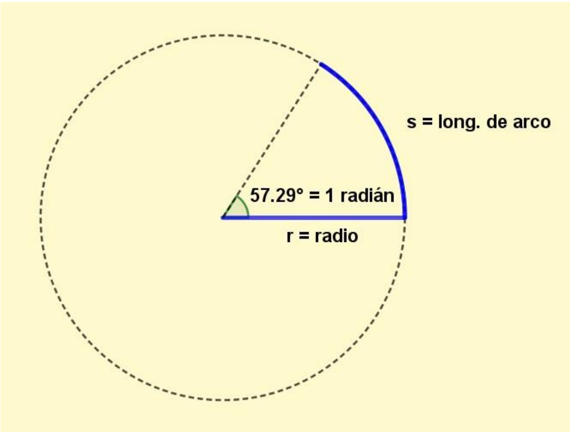
Analíticamente el arco “s” es directamente proporcional al ángulo “θ” y al radio "r" de acuerdo a la expresión:

$$s = \theta . r$$

siendo “r” el radio que lo generó.

Si se divide el arco por el radio se obtiene un número adimensional que equivale a 1 radián.

$$1rad = \frac{arco}{radio} = \frac{R}{R}$$



4.2. Sistema sexagesimal

En este sistema a la circunferencia se la divide en 360 partes siendo cada una de ellas equivalente a 1°. (En algunas calculadoras se abrevia “Deg” o Sexages)

Sistema centesimal

En este sistema a la circunferencia se la divide en 400 partes siendo cada una de ellas equivalente a 1°. (En algunas calculadoras se abrevia “Gra”)

La equivalencia entre los tres sistemas para un ángulo llano es:

$$180º\ (Deg) \ = \ \pi\ (Rad) \ = \ 200º\ (Gra)$$

$360° = 2\pi\ radianes$ (una vuelta completa) Un ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes (un cuarto de vuelta)

$180° = \pi\ radianes$ (media vuelta) Como $180º = \pi\ rad$, resulta que 1º = $\frac{\pi}{180}$ rad

Un ángulo de 1 $radian$ tiene $\frac{180}{\pi}$ = 57,29578° = 57º 17’ 45”

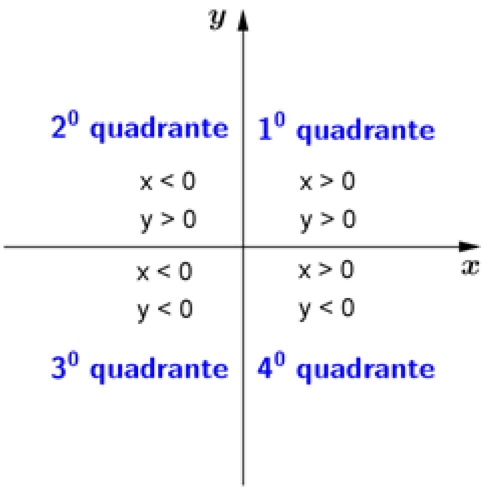
Para transformar de una unidad a otra, usamos la regla de tres: $\frac{180^{o}}{x^{o}} = \frac{\pi\, rad}{y}$

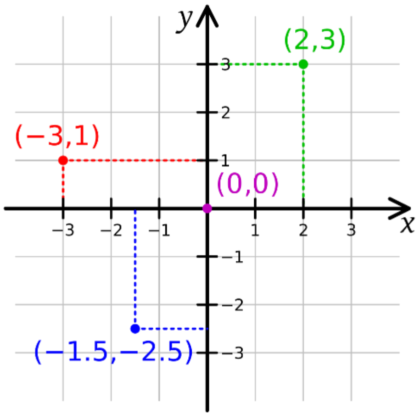
Ejemplo: 40º a rad

$$\frac{180^{o}}{40^{o}} = \frac{\pi\, rad}{y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{40^{o}\,\pi\, rad}{180^{o}} = \frac{4\pi\, rad}{18} = \frac{2\pi\, rad}{9}$$

4.3. Sistema Cartesiano Ortogonal

Anteriormente, se ha representado al conjunto de los números reales en una recta. Si se consideran dos rectas (de números reales) que se intersecan perpendicularmente en un punto O, éstas constituyen los ejes del sistema cartesiano ortogonal (cartesiano porque lo definió René Descartes y ortogonal porque las dos rectas numéricas se encuentran perpendiculares entre sí). Este sistema se utiliza como referencia para establecer las coordenadas de puntos del plano.





Entonces, como un ángulo es invariante respecto de su posición en el plano y con el único motivo de facilitar definiciones, propiedades y cálculos, es conveniente referirlo a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. De esta forma al primer cuadrante le corresponden ángulos desde $0°$ hasta $90°$ (tomados en sentido antihorario), el segundo cuadrante desde $90°$ hasta $180°$, el tercer cuadrante desde $180°$ hasta $270°$ y el cuarto cuadrante desde $270°$ hasta $360°$. Al seguir girando en ese sentido se obtienen ángulos mayores a $360°$; por ejemplo un ángulo de $1125°$ serán 3 giros y $1/8$ y estará en el primer cuadrante, un ángulo de $-120°$ tendrá sentido horario y estará en el tercer cuadrante. Un ángulo se encuentra en posición normal si su vértice se ubica en el origen de coordenadas O y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas. Los ejes coordenados (generalmente denominados "$eje\ x$" o eje de abscisas y "$eje\ y$" o eje de ordenadas) dividen al plano en cuatro sectores llamados cuadrantes. Cada punto del plano queda asociado a un par ordenado (a, b) de números reales.

4.4. Relaciones Trigonométricas de un Ángulo

4.4.1. Relaciones trigonométricas

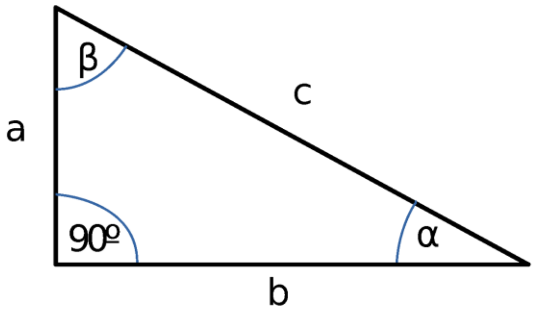
Los triángulos rectángulos poseen dos catetos (los dos más cortos) y la hipotenusa (el lado más largo). Además posee un ángulo recto "frente" a la hipotenusa que mide 90º en el sistema

sexagesimal (DEG en la calculadora) y $\pi/2$ en el sistema natural de medición de ángulos (o RAD en la calculadora).
Para triángulos rectángulos se establecieron relaciones las cuales se detallan a continuación:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$



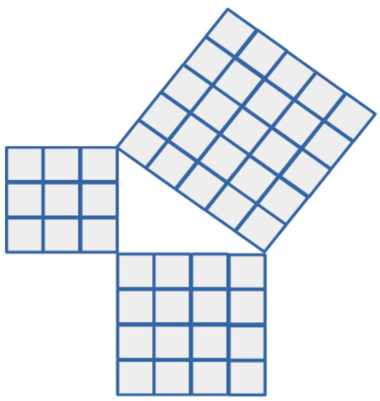
Aplicadas a un triángulo rectángulo como el de la figura se tendrá:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

4.5. Teorema de Pitágoras

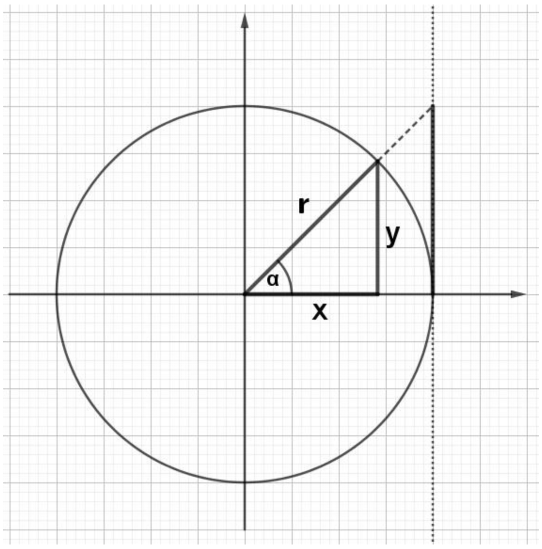
Utilizado solo para triángulos rectángulos se explica del siguiente arreglo geométrico:
$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \rightarrow \quad 9 + 16 = 25.$
Con esto se consigue formar un triángulo rectángulo que se interpreta como sigue: con 25 cuadrados se pueden formar uno de 9 cuadrados agrupados en $3x3$ y otro de 16 cuadrados agrupados en $4x4$. Si se los ubica como muestra la figura con los dos más pequeños se pueden ubicar de tal manera que otro cuadrado de $5x5$ queda posicionado de tal manera que se forma un triángulo rectángulo.



La expresión general del teorema es $c^2 = a^2 + b^2$ siendo "a" y "b" los lados de los catetos y "c" la hipotenusa.
Pregunta: ¿qué otro par de valores sumados generan una superficie equivalente como la mostrada?

4.6. Relación Fundamental de la Trigonometría

Utilizando un círculo de radio "r" se puede inscribir dentro del mismo un triángulo rectángulo según se muestra en el esquema:



$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \to x = r.\cos\alpha \quad sen\alpha = \frac{y}{r} \to y = r.sen\alpha$$

Reemplazando ambas expresiones en el teorema de Pitágoras se tendrá:

$$y^2 + x^2 = r^2$$
$$r^2.sen^2\alpha + r^2.\cos^2\alpha = r^2$$
$$r^2.(sen^2\alpha + \cos^2\alpha) = r^2$$
$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

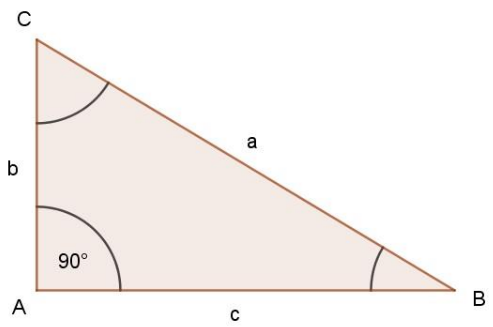
4.7. Resolución de triángulos rectángulos

En el caso de que el triángulo sea rectángulo, como el ángulo recto ya está determinado, para resolverlo basta con conocer dos de sus elementos siempre que uno de ellos sea un lado. Así pues, pueden presentarse los cuatro casos siguientes:

Caso 1: Que se conozcan los dos catetos.
Caso 2: Que se conozcan un cateto y la hipotenusa.
Caso 3: Que se conozcan un cateto y un ángulo agudo.
Caso 4: Que se conozcan la hipotenusa y un ángulo agudo.

Caso 1

Utilizaremos la siguiente figura como referencia. Como podemos ver el vértice A y los catetos b y c son los elementos conocidos. Para determinar los restantes elementos emplearemos las expresiones siguientes:
$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $\tan B = \frac{b}{c}$



$$C = 90° - B \qquad Area = \frac{base\ x\ altura}{2}$$

Ejemplo:

Resolver un triángulo rectángulo sabiendo que sus catetos son $b = 6\ cm$ y $c = 8\ cm$.
Solución. Tendremos

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10\,cm$$

$$\tan B = \frac{b}{c} = \frac{6}{8} = 0{,}75 \Rightarrow B = ArcTan(0{,}75) = 36°52'\,11''$$

$Por\ lo\ tanto$: $C = 90° - B = 90° - 36°\ 52'\ 11'' = 53°\ 7'\ 49''$

$$Área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{8.6}{2} = 24\,cm^2$$

Caso 2

Como vemos en el triángulo de referencia A, a y c son los elementos conocidos. Para determinar los restantes elementos emplearemos las expresiones siguientes:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$\tan C = \frac{c}{b}$$

$$B = 90° - C$$

Ejemplo:

Resolver un triángulo rectángulo sabiendo que su hipotenusa a= 15 cm y su cateto c= 12 cm.
Solución. Tendremos:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9\,cm$$

$$\tan C = \frac{c}{b} = \frac{12}{9} = 1{,}3333 \Rightarrow C = ArcTan(1{,}3333) = 53°\ 7'\ 48''$$

$Por\ lo\ tanto$: $B = 90° - C = 90° - 53°\ 7'\ 48'' = 36°\ 52'\ 12''$

$$Área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{12.9}{2} = 54\,cm^2$$

Caso 3

En este caso A, b y C son los elementos conocidos. Para determinar los restantes elementos emplearemos las expresiones siguientes:

$$B = 90° - C$$

$$c = b\,.\tan C$$

$$a = \frac{b}{sen\,B}$$

Ejemplo

Resolver un triángulo rectángulo sabiendo que $b = 6\ cm$ y $C = 42°$
Solución. Tendremos:

$$B = 90° - C = 90° - 42° = 48°$$

$$c = b\,.\tan C = 6\,.\tan 42° = 5{,}4\,cm$$

$$a = \frac{b}{sen\,B} = \frac{6}{sen\,48°} = 8{,}07\,cm$$

$$Área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{5{,}4.6}{2} = 16{,}2\,cm^2$$

Caso 4

Aquí los elementos conocidos son A, a y C. Para determinar los restantes emplearemos las expresiones siguientes:

$$B = 90° - C$$

$$b = a\,.sen\,B$$

$$c = a\,.sen\,C$$

Ejemplo

Resolver un triángulo rectángulo sabiendo que $a = 20\ cm$ y $C = 30°$
Solución. Tendremos:

$$B = 90° - C = 90° - 30° = 60°$$

$$b = a\,.sen\,B = 20\,.sen\,60° = 17{,}32\,cm$$

$$c = a\,.sen\,C = 20\,.sen\,30° = 10\,cm$$

$$Área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{10.17{,}32}{2} = 86{,}6\,cm^2$$

4.8. Resolución de triángulos oblicuángulos

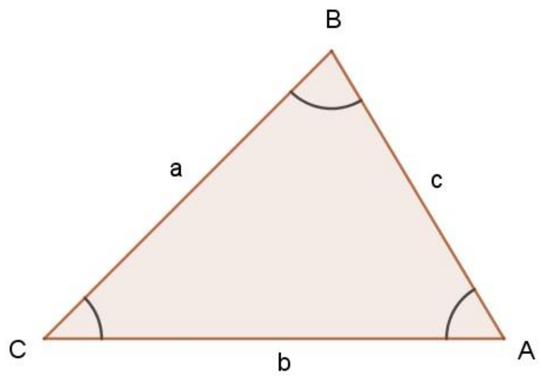
En el caso de que el triángulo sea oblicuángulo pueden presentarse los tres casos siguientes:

1. Que se conozcan los tres lados.
2. Que se conozcan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
3. Que se conozcan un lado y dos ángulos.

Caso 1

Utilizaremos la siguiente figura como referencia. En este caso, a, b y c son los elementos conocidos. Para determinar los restantes elementos procedemos del siguiente modo:

Para calcular el ángulo A aplicamos el Teorema del coseno que dice: “El cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman”. En este caso nos quedaría:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

Aplicamos el mismo teorema para calcular los otros dos ángulos:
Ángulo B

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$$

Ángulo C

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

Ejemplo

Resolver un triángulo oblicuángulo sabiendo que a= 17 cm, b= 21 cm y c= 14 cm.
Solución. Tendremos:

$$\cos A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = \frac{21^2 + 14^2 - 17^2}{2.21.14} = 0{,}5918 \Rightarrow A = ArcCos(0{,}5918) = 53^\circ\ 42'\ 45''$$

$$\cos B = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac} = \frac{17^2 + 14^2 - 21^2}{2.17.14} = 0{,}0924 \Rightarrow B = ArcCos(0{,}0924) = 84^\circ\ 41'\ 46''$$

$$\cos C = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab} = \frac{17^2 + 21^2 - 14^2}{2.17.21} = 0{,}7479 \Rightarrow C = ArcCos(0{,}7479) = 41^\circ\ 35'\ 46''$$

Caso 2

En este caso, A, b y c son los elementos conocidos. Para determinar los restantes procedemos del siguiente modo:
Cálculo del $lado\ a$. Por el Teorema del Coseno tendremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A}$$

Cálculo del $ángulo\ B$. Por el Teorema del Coseno tendremos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{2ac}$$

Cálculo del $ángulo\ C$. Análogamente tendremos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2ab}$$

Ejemplo

Resolver un triángulo oblicuángulo sabiendo que $A = 60°$, $b = 12\ cm$ y $c = 14\ cm$.
Solución. Tendremos:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A} = \sqrt{12^2 + 14^2 - 2.12.14.\cos 60°} = 13{,}11\,cm$$

$$\cos B = \frac{\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{2ac} = \frac{\left(13{,}11^2 + 14^2 - 12^2\right)}{2.13{,}11.14} = 0{,}6100 \Rightarrow B = ArcCos(0{,}6100) = 53°\ 24'\ 40''$$

$$\cos C = \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2ab} = \frac{(13{,}11^2 + 12^2 - 14^2)}{2.13{,}11.12} = 0{,}3812 \Rightarrow C = ArcCos(0{,}3812) = 67°\ 35'\ 20''$$

Caso 3

En este caso A, B y c son los elementos conocidos. Para determinar los restantes procedemos del siguiente modo:

Cálculo del ángulo C.

$$C = 180° - (A + B) = 180° - A - B$$

Cálculo del lado a. Para calcular este lado utilizamos el Teorema de los senos que dice: “Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos”.

Esto se expresa diciendo que:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$

Entonces para calcular el $lado\ a$, tendremos:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{c}{sen\,C} \Rightarrow a = \frac{c.sen\,A}{sen\,C}$$

Cálculo del $lado\ b$. Análogamente:

$$\frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C} \Rightarrow b = \frac{c.sen\,B}{sen\,C}$$

Ejemplo

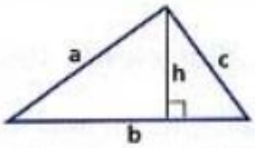
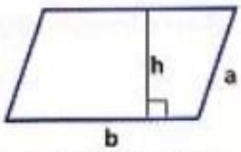
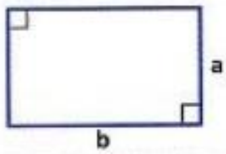
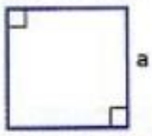
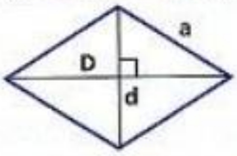
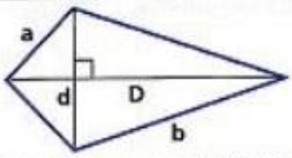
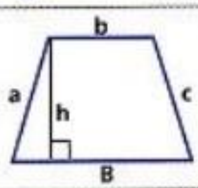
Resolver un triángulo oblicuángulo sabiendo que $A = 50°$, $B = 30°$ y $c = 20\ cm$.
Solución. Tendremos:

$$C = 180° - A - B = 180° - 50° - 30° = 100°$$

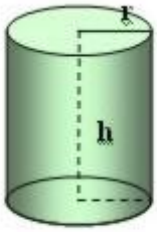
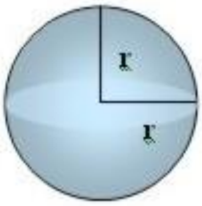
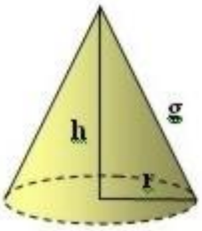
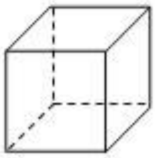
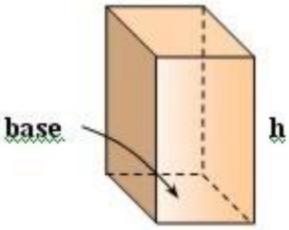
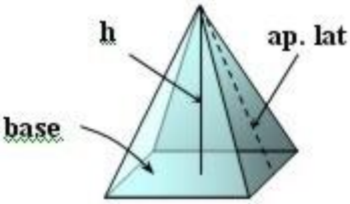
$$a = \frac{c.sen A}{sen C} = \frac{20\ .\ sen 50°}{sen 100°} = 15{,}56\ cm$$

$$b = \frac{c.sen B}{sen C} = \frac{20.sen 30°}{sen 100°} = 10{,}15\ cm$$

Perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.

Perímetros y áreas de figuras planas		Perímetro	Area
Triángulo		$a + b + c$	$\frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo		$2 \cdot (a + b)$	$b \cdot h$
Rectángulo		$2 \cdot (b + a)$	$b \cdot a$
Cuadrado		$4 \cdot a$	a^2
Rombo		$4 \cdot a$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Cometa		$2 \cdot (b + a)$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio		$B + b + a + c$	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Círculo		$2 \cdot \pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		A = 6 a2	V = a3
Prisma		A = (perim. base •h) + 2 • area base	V = área base.h
Pirámide		$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap.lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$